素粒子標準模型を超える物理の基礎

丸 信人
大阪公立大学 理学研究科/南部陽一郎 物理学研究所

2023/9/20-22 @瀬戸内サマーインスティテュート2023

PLAN

◎ 階層性問題

◎ GUT

◎ SUSY

◎ Extra Dimension

あつかうテーマが大きいので、あまり深く議論できませんが、模型構築のエッセンスをお話しできれば....

(Standard Model の基本的知識は前提としますが、遠慮なく質問して下さい)

⑨ References

GUT

- H. Georgi, LIE ALGEBLAS IN PARTICLE PHYSICS
  FROM ISOSPIN TO UNIFIED THEORIES
- T.-P. Cheng and L.-F. Li
  Gauge theory of elementary particle Physics

など

SUSY, Extra Dimension 全体

- C. Csaki and P. Tanedo,
  Beyond the Standard Model
  Lectures at the 2013 European School of High Energy Physics, 1602.04228[hep-ph]
- 林青司, 素粒子の標準模型を超えて
  (丸善出版)
- Particle Data Group の Review　　など

SUSY

- S. Martin, A Supersymmetry Primer
  hep-ph/9709356
- J. Terning, Modern Supersymmetry
  OXFORD UNIVERSITY PRESS
- 解説記事「超対称性」数理科学 2019年3月号
  など

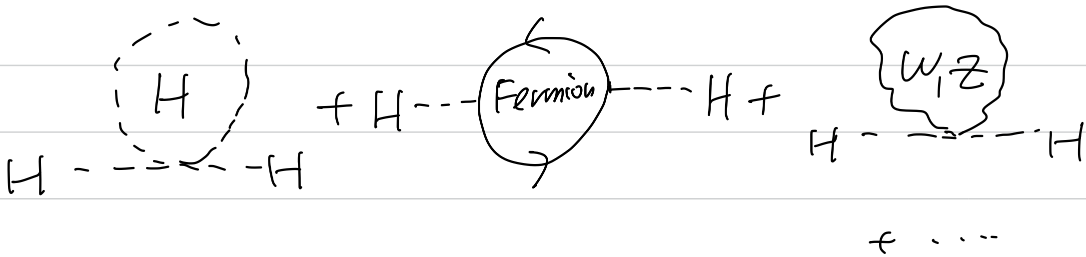
Extra Dimensions

- R. Sundrum, To the Fifth Dimension and Back, hep-th/0508134
- 原子核三者若手夏の学校 2022
  「ゲージヒッグス統合理論の現状と今後の展望」講義録 youtube チャンネル
  など

階層性問題

◎ Standard Model の枠組みで、ヒッグス場の質量を計算すると、不自然なパラメタの微調整が避けられない

$$\underbrace{m_H^2}_{\text{物理的なヒッグス質量}} = \underbrace{m_0^2}_{\text{古典的}} + \underbrace{\delta m^2}_{\text{量子補正}} \approx \underbrace{(125\,\mathrm{GeV})^2}_{\text{実験値}}$$



Standard Model がプランクスケール $M_p \sim 10^{18}\,\mathrm{GeV}$ まで正しいと仮定すると

$$\int \frac{d^4k}{k^2 - m^2} = \int_0^{M_p^2} dk^2 \frac{\pi k^2}{k^2 - m^2} \approx M_p^2$$

$$m_H^2 = \mathcal{O}(M_p^2) - \mathcal{O}(M_p^2) \simeq (125\,\mathrm{GeV})^2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{r} 1.00000000000000000000000000000001 \\ -\ 1.00000000000000000000000000000000 \end{array}$$

(32ケタ)

絶妙な相殺 あるいは
パラメタ間の(不自然な)微調整 が不可避

自然界でこのような相殺が起こっていると信じられるか? パラメタの微調整なしに、より自然に実現できないだろうか?

基本理論の立場からすると、ElectroWeak (EW) スケール ($\sim \mathcal{O}(100\,\mathrm{GeV})$) がプランクスケールにくらべて、非常に小さいことが問題

$\Lambda = 1000\ \mathrm{GeV}\ (= 1\ \mathrm{TeV})$ あたりに
新しい物理があると仮定すると、

$$\int \frac{d^4k}{k^2-m^2} = \int_0^{(1\mathrm{TeV})^2} dk^2 \frac{\pi k^2}{k^2-m^2} \approx (1\ \mathrm{TeV})^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} m_H^2 = \mathcal{O}\left((1\mathrm{TeV})^2\right) - \mathcal{O}\left((1\mathrm{TeV})^2\right) \approx (125\ \mathrm{GeV})^2 \\ \text{または、} \\ m_H^2 \approx \frac{1}{16\pi^2}\mathcal{O}\left((1\mathrm{TeV})^2\right) \approx (125\ \mathrm{GeV})^2 \end{gathered}}$$

のように より自然に理解できる。

不自然な微調整をうけいれる立場もありうるが、多くの素粒子論研究者は、Standard Model を拡張した新しい物理によって自然に実現されるべきと考える

テラスケールの新しい物理へのアプローチ

① ダイナミックス ⇒ 複合粒子模型

② 対称性 ⇒ 超対称模型

③ 幾何学 ⇒ 余剰次元模型

標準模型を超える物理

◎ テクニカラー模型
◎ 超対称模型
◎ リトルヒッグス模型
◎ 古典的スケール不変模型

4次元模型

◎ 大きい余剰次元模型
◎ 曲がった余剰次元模型
◎ ゲージ・ヒッグス統一模型

高次元模型

など多数

§ Grand Unified Theory (GUT)

* Standard Model (SM) : $\underbrace{SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y}_{\text{ゲージ群の積}}$

Strong interaction
weak interaction
electromagnetic int.

} 1つの理論で記述されていない

* $U(1)_Y$ の固有値は量子化される必要がない。
しかし、西島・中野・Gell-Mann の法則

$$\underset{\uparrow\atop e\text{の倍数}}{Q_{em}} = \underset{\uparrow\atop \text{量子化されている}}{I_3^L} + \frac{Y}{2} \quad \leftarrow \text{量子化されるべき}$$

* matter multiplets も別々

$q(3, 2, \frac{1}{6})$ $u_R(3, 1, \frac{2}{3})$ $d_R(3, 1, -\frac{1}{3})$

$l(1, 2, -\frac{1}{2})$ $e_R(1, 1, 1)$

$\times 3$(世代)

* SM は、19コの free parameter をもつ

gauge coupling : g_3, g, g' ⟶ 3

charged fermion masses : $m_{u,d,s,c,b,t}$ ⟶ 9
$m_{e,\mu,\tau}$

V_{CKM} : 3 mixing angles, 1 phase ⟶ 4

v : Higgs field VEV
λ : Higgs potential の4点結合 } 2

θ : QCD θ parameter

ν 振動 data : 3 masses + 3 mixing angles
+ 1 phase (Dirac ν)
+ 2 additional phases
(Majorana ν)

$$\mathcal{L}_{QCD} \supset \frac{\theta}{64\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G^a_{\mu\nu} G^a_{\rho\sigma}$$ ← ゲージ不変性より許される。

P と CP 両方破る

data $|\theta| < 10^{-10}$

from n EDM

"strong CP problem"

＊ 以上の問題は、もし Standard model を
より大きな Non-Abelian gauge group
$G \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ にうめこむと
ただちに解決

⟹ Georgi & Glashow が 1番簡単な場合
を提唱： $G = SU(5)$ (minimal SU(5) GUT)
1974年

⑨ SU(5) GUT

* matter sector

SU(5)の生成子は、traceless

⇒ $U(1)_{em}$ charge operator は、SU(5)の diagonal 生成子の線形結合

⇒ quarks & leptons は、$U(1)_{em}$電荷がゼロになるようなSU(5) multiplets の成分でなければならない。

例 $(\nu_e, e)_L$ $Q_{\nu_e} + Q_e = 0 - 1 = -1$

この電荷をcancelするfieldsは何か？

$$Q_{d_R} = -\frac{1}{3} \xrightarrow[\text{conjugation}]{\text{charge}} Q_{d^c_L} = \frac{1}{3} \times 3 = +1$$

$$d^c_L = (d^c)_L$$

(余)

charge conjugation は chirality を いれかえる

$$(d_R)^c \equiv \underbrace{C}_{i\gamma^2\gamma^0}(\gamma^0)^T (Rd)^* = C(\gamma^0)^T R d^*$$

$$= L\, C(\gamma^0)^T d^* = L\, d^c = (d^c)_L$$

＊ 以上の考察より、

RH d の反粒子 + LH charged leptons = $\underline{\underline{5^*}}$ 表現

$$\psi^c = \left((d_{1R})^c, (d_{2R})^c, (d_{3R})^c, \nu_{eL}, e_L \right)$$

$$= \left((d^{c1})_L, (d^{c2})_L, (d^{c3})_L, \nu_{eL}, e_L \right)$$

$$= \left(d^{c1}, d^{c2}, d^{c3}, e, -\nu_e \right)_L$$

上つき そえ字に そろえる

$$l_a = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$$

$$l^a = \varepsilon^{ab} l_b = \begin{pmatrix} e \\ -\nu_e \end{pmatrix}$$

(convension)

$$\boxed{\begin{array}{ll} d_R\left(3, 1, -\frac{1}{3}\right)_R, & L\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)_L \\ \quad\ \ \text{\rotatebox{90}{$=$}} & \qquad\ \ \text{\rotatebox{90}{$=$}} \\ \left(3^*, 1, \frac{1}{3}\right)_L & \qquad\ \ 2^* \end{array}}$$

$\left(3^*, 1, \frac{1}{3}\right)_L$ と 2^* で 5^* 表現

＊ 残りの quarks & leptons

$q_L(3,2,\frac{1}{6})_L \quad u_R(3,1,\frac{2}{3})_R \quad e_R(1,1,-1)_R$

|| c.c.

$(u_R)^c(3^*,1,-\frac{2}{3})_L \quad (e_R)^c(1,1,1)_L$

$\rightarrow 3\times 2+3^*\times 1+1=\underline{10} \leftarrow$ SU(5)の2階反対称テンソル $\psi_{[ij]}$

$(u_R)^c$

$$\psi_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & (u_{3R})^c & -(u_{2R})^c & -u_{1L} & -d_{1L} \\ -(u_{3R})^c & 0 & (u_{1R})^c & -u_{2L} & -d_{2L} \\ (u_{2R})^c & -(u_{1R})^c & 0 & -u_{3L} & -d_{3L} \\ u_{1L} & u_{2L} & u_{3L} & 0 & -(e_R)^c \\ d_{1L} & d_{2L} & d_{3L} & \boxed{(e_R)^c} & 0 \end{pmatrix}$$

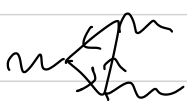
q_L

（符号：(123)の偶奇による）

$$
= \begin{pmatrix}
0 & u^{c3} & -u^{c2} & -u_1 & -d_1 \\
-u^{c3} & 0 & u^{c1} & -u_2 & -d_2 \\
u^{c2} & -u^{c1} & 0 & -u_3 & -d_3 \\
u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^{+} \\
d_1 & d_2 & d_3 & e^{+} & 0
\end{pmatrix}_L \leftarrow 10表現
$$

すべてのSM fermionsがSU(5)の $3\times(5^*\oplus 10)$ 表現にうめこまれた。

この組合わせは gauge anomalyを相殺



$$
\propto \mathrm{tr}\left(T^a(R)\{T^b(R), T^c(R)\}\right)
$$

$$
\overset{SU(N)}{=} A(R)\,\mathrm{tr}\left(T^a(N),\{T^a(N), T^a(N)\}\right)
$$

$$
A(N^*) = -A(N)
$$

$$
+)\ A\left(\frac{N(N-1)}{2}\right) = (N-4)A(N)
$$

$$
= (N-5)A(N) \underset{\substack{\uparrow \\ SU(5)}}{=} 0
$$

* SM fermions は、右巻きと左巻きの間で非対称、

⇒ charge conjugation のもとで非対称ともいえる。

⇒ complex representation にうめこまれる

ランク4をもつ他のゲージ群の候補

$SO(8)$, $SO(9)$, $Sp(8)$, F_4, $SU(3)\times SU(3)$ ...

$SU(3)\times SU(3)$ 以外は、complex rep. をもたない

* 10 表現は、2つの5表現のテンソル積からつくれる。

$$\left[\left(3,1,-\tfrac{1}{3}\right)_L \oplus \left(1,2,\tfrac{1}{2}\right)_L\right]\otimes\left[\left(3,1,-\tfrac{1}{3}\right)_L \oplus \left(1,2,\tfrac{1}{2}\right)_L\right]_A$$

$$=\left(\underbrace{(3\times 3)_A}_{\shortparallel\; 3^*},1,-\tfrac{2}{3}\right)_L \oplus \left(3,2,\tfrac{1}{6}\right)_L \oplus \left(1,\underbrace{(2\otimes 2)_A}_{\shortparallel\; 1},1\right)_L$$

$$=(u_R)^c \oplus q_L \oplus (e_R)^c$$

* generator structure $T^a \in SU(5)$

① $SU(2)$ generators

$$T^a = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma^a/2 \end{array}\right) \qquad a = 1, 2, 3$$

② $SU(3)$ generators

$$T^a = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^{a-3}/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad a = 4, \cdots, 11$$

③ $U(1)_Y$ generator

$$\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,\mathrm{diag}\Big(\overbrace{\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}}^{(d_R)^c}, \overbrace{-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}}^{L}\Big)$$

$$T^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ \hline & 0 & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & -\frac{3}{2} \end{array}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}}\, Y$$

normalization

$$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$
$$(a, b = 0, \cdots, 23)$$

④ $SU(5)/(SU(3)\times SU(2)\times U(1))$ generators

$$T^a = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 0 \end{array}\right) \qquad a = 12, \cdots, 23$$

color & weak charges

陽子崩壊で重要

* Gauge bosons

gauge bosons = adjoint rep. of $SU(5)$

= 24-dim rep.

$$24 = \underbrace{(8,1)_0}_{\text{gluons}} \oplus \underbrace{(1,3)_0}_{\text{weak}} \oplus \underbrace{(1,1)_0}_{\text{hyper charge}} \oplus \underbrace{(3,2^*)_{-\frac{5}{6}} \oplus (3^*,2)_{\frac{5}{6}}}_{X, Y \text{ gauge bosons}}$$

SMには含まれていない

行列表示では、 $A_\mu = \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a T^a$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & X_{1\mu} & Y_{1\mu} \\ & G_\mu - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & & X_{2\mu} & Y_{2\mu} \\ & & & X_{3\mu} & Y_{3\mu} \\ \hline X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & \frac{W_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}} & W_\mu^+ \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 & W_\mu^- & -\frac{W_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}} \end{array} \right)$$

* matter coupling of gauge bosons

$$D_\mu \psi = \left[\partial_\mu + i g_5 \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a T^a \right] \psi$$

$$\Downarrow$$

$$g_3 = g_2 = g_5, \quad g_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} g_5 \ @M_{GUT}$$

weak mixing angle が予言される!!

$$\sin^2\theta_W = \frac{g_1^2}{g_2^2 + g_1^2} = \frac{\frac{3}{5} g_5^2}{g_5^2 + \frac{3}{5} g_5^2} = \frac{3}{8}$$

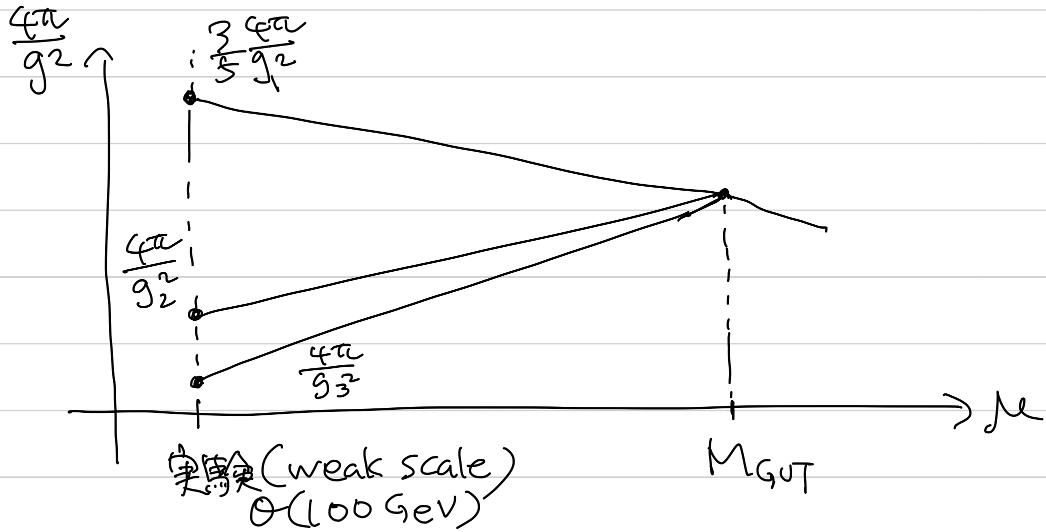
$@M_{GUT} \approx 10^{15}\,\mathrm{GeV}$

* gauge coupling unification ⟶ M_{GUT}の決定

$g_{3,2,1}(\mu)$ のくりこみ群による発展

↳ エネルギースケール

$g_1(\mu)$ ↗ $g_{2,3}(\mu)$ ↘ ⟹ どこかのスケールで一致する傾向



$g_{1,2}$が実験で精密に測定されているので、
$g_{1,2}$の発展から、M_{GUT}, $\alpha(M_{GUT})$を決定。
その点からg_3をweak scaleまで下ろし、
実験誤差範囲に入るかで判断する。

参考　ゲージ結合定数のくりこみ群方程式 (1-loop)

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi}{g_3^2(\mu)} = \dfrac{1}{\alpha_{GUT}} + \dfrac{1}{6\pi}(4F-33)\log\left(\dfrac{M_{GUT}}{\mu}\right) \\ \dfrac{4\pi}{g_2^2(\mu)} = \dfrac{1}{\alpha_{GUT}} + \dfrac{1}{6\pi}(4F-22)\log\left(\dfrac{M_{GUT}}{\mu}\right) \\ \dfrac{3}{5}\dfrac{4\pi}{g_1^2(\mu)} = \dfrac{1}{\alpha_{GUT}} + \dfrac{1}{6\pi}4F\log\left(\dfrac{M_{GUT}}{\mu}\right) \end{cases}$$

(F : 世代数)

$$\left(\alpha_{GUT} = \frac{4\pi}{g^2(M_{GUT})} \right)$$

参考　実験データ

$$\begin{cases} \alpha_{em}^{-1}(M_Z) = 127.916 \pm 0.015 \\ \alpha_3(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0007 \\ \alpha_2(M_Z) = \alpha_{em}(M_Z)\sin^2\theta_W(M_Z) \\ \qquad\qquad = 0.001807 \pm 0.0002 \\ \sin^2\theta_W(M_Z) = 0.23116 \pm 0.00013 \end{cases}$$

$$* \quad \sin^2\theta_W(\mu) = \frac{3}{8}\left[1 + \frac{55}{9\pi}\alpha_{em}(\mu)\log\left(\frac{\mu}{M_{GUT}}\right)\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\mu = M_Z,\ M_{GUT} = 2\times10^{15}\,\mathrm{GeV} \\ \alpha_{em}(\mu^3)\ \exp}]{} \quad \sin^2\theta_W(M_Z) \simeq 0.20$$

$g_{1,2}$ の RGE から導出できる

* GUT symmetry breaking

2つのスケール: M_{GUT}, M_W ⇒ 2 step breaking

$$\boxed{\begin{aligned} SU(5) &\xrightarrow{M_{GUT}} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \\ &\xrightarrow{M_W} SU(3)_C \times U(1)_{em} \end{aligned}}$$

<u>Higgs potential</u>

$$V(\Sigma, H) = V(\Sigma) + V(H) + \lambda_4 (\mathrm{tr}\Sigma^2)|H|^2 + \lambda_5 H^\dagger \Sigma^2 H$$

$$V(\Sigma) = -M^2(\mathrm{tr}\Sigma^2) + \lambda_1(\mathrm{tr}\Sigma^2)^2 + \lambda_2(\mathrm{tr}\Sigma^4)$$

$$V(H) = -m^2|H|^2 + \lambda_3|H|^4$$

Σ: 24-dim adj. rep

H: 5-dim 基本表現 $\begin{pmatrix} H_3 \\ H_2 \end{pmatrix}$

colored Higgs

SM Higgs

くりこみ可能性と gauge不変性 と $\begin{cases} \Sigma \to -\Sigma \\ H \to -H \end{cases}$ を仮定

1st stage of SSB @ M_{GUT}

$$0 = \frac{\partial V(\Sigma, H=0)}{\partial \Sigma} = \frac{dV(\Sigma)}{d\Sigma} \to \langle \Sigma \rangle \text{の決定}$$

$$\langle \Sigma \rangle = v \, \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$$

ただし、$\sum_{i=1}^{5} \sigma_i = 0$, $v \sim O(M_{GUT})$

といつでもできる。

$$\therefore V(\Sigma) = -M^2 v^2 \sum_{i=1}^{5} \sigma_i^2 + \lambda_1 v^4 \left(\sum_{i=1}^{5} \sigma_i^2\right)^2 + \lambda_2 v^4 \sum_{i=1}^{5} \sigma_i^4$$

$$0 = \frac{dV(\Sigma)}{d\Sigma} = \frac{dV(\Sigma)}{dv}$$

$$= 2v\left[-M^2 \sum_{i=1}^{5} \sigma_i^2 + 2\lambda_1 v^2 \left(\sum \sigma_i^2\right)^2 + 2\lambda_2 v^2 \sum \sigma_i^4\right]$$

$$\begin{cases} ① \ \langle \Sigma \rangle = v(2,2,2,-3,-3) & v \neq 0 \\ ② \ \langle \Sigma \rangle = (0,0,0,0,0) \end{cases}$$ を考える。

① $0 = -M^2(4\times 3 + 9\times 2) + 2\lambda_1 v^2 (12+18)^2$

$+ 2\lambda_2 v^2 (16\times 3 + 81\times 2)$

$\Rightarrow \boxed{M^2 = 60\lambda_1 v^2 + 14\lambda_2 v^2} \Rightarrow v \sim O(M)$

$V(\langle \Sigma \rangle) = -M^2 v^2 \times 30 + \lambda_1 v^4 \times 900 + \lambda_2 v^4 \times 210$

$= 30 v^4 (-30\lambda_1 - 7\lambda_2)$

① が真空として実現されるためには、$V(\langle \Sigma \rangle) < 0$

$\Leftrightarrow -30\lambda_1 - 7\lambda_2 < 0$

* covariant derivative of Σ

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma + i g_5 [A_\mu, \Sigma]$$

$$= D_\mu \tilde{\Sigma} + i g_5 [A_\mu, \langle \Sigma \rangle]$$

$$\Sigma = \langle \Sigma \rangle + \tilde{\Sigma}$$

adj. rep. に作用するときは，交換子でないと共変にならない

参考

$$D_\mu \Sigma \xrightarrow{SU(5) \ni U} \partial_\mu (U \Sigma U^\dagger) + i g_5 \left[U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g_5} (\partial_\mu U) U^\dagger, U \Sigma U^\dagger \right]$$

$$= \underbrace{(\partial_\mu U) \Sigma U^\dagger}_{\text{cancel}} + U (\partial_\mu \Sigma) U^\dagger + \underline{U \Sigma (\partial_\mu U^\dagger)}$$

$$+ i g_5 (U A_\mu \Sigma U^\dagger - U \Sigma A_\mu U^\dagger)$$

$$- (\partial_\mu U) \Sigma U^\dagger + U \Sigma \underbrace{U^\dagger (\partial_\mu U)}_{= -U \partial_\mu U^\dagger} U^\dagger$$

cancel

$\partial_\mu (U U^\dagger) = 0$

$$= U (D_\mu \Sigma) U^\dagger$$

* gauge boson mass

$|D_\mu \Sigma|^2$ の中の $\underline{|g_5[A_\mu, \langle\Sigma\rangle]|^2}$ からよみとれる。

$$[A_\mu, \langle\Sigma\rangle] = \frac{v}{\sqrt{2}}\left[\left(\begin{array}{c|c} G-\frac{2}{\sqrt{30}}B & X \; Y \\ \hline \begin{matrix} X^\dagger \\ Y^\dagger \end{matrix} & \begin{matrix} W+B & W^+ \\ W^- & -W+B \end{matrix} \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ \hline & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{array}\right)\right]$$

$$= \frac{v}{\sqrt{2}}\left[\left(\begin{array}{c|c} 2\left(G-\frac{2}{\sqrt{30}}B\right) & -3(X \; Y) \\ \hline \begin{matrix} 2X^\dagger \\ 2Y^\dagger \end{matrix} & \begin{matrix} -3(W+B) & \\ & -3(-W+B) \end{matrix} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 2\left(G-\frac{2}{\sqrt{30}}B\right) & 2(X \; Y) \\ \hline \begin{matrix} -3X^\dagger \\ -3Y^\dagger \end{matrix} & \begin{matrix} -3(W+B) & \\ & -3(-W+B) \end{matrix} \end{array}\right)\right]$$

$$= \frac{5v}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c} 0 & X \; Y \\ \hline \begin{matrix} X^\dagger \\ Y^\dagger \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \underline{\text{would-be NG bosons}} \\ \left(\begin{array}{c|c} & \Sigma_X \; \Sigma_Y \\ \hline \begin{matrix} \Sigma_X^\dagger \\ \Sigma_Y^\dagger \end{matrix} & \end{array}\right) \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_X = M_Y = \frac{5}{\sqrt{2}} g_5 v}$$

$\supset -m^2|H|^2$

$$* \quad V(\langle\Sigma\rangle, H) = V(\langle\Sigma\rangle) + V(H)$$

$$+ 30\lambda_4 v^2 |H|^2 + \lambda_5 v^2 H^\dagger \left(\begin{array}{c|c} 4_{4} & 0 \\ \hline 0 & 9_{9} \end{array}\right) H$$

$$\supset m_3^2 |H_3|^2 + m_2^2 |H_2|^2$$

ここで、
$$\begin{cases} m_3^2 = -m^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_5) v^2 \sim \mathcal{O}(M_{GUT}) \\ m_2^2 = -m^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_5) v^2 \approx 0 \end{cases}$$

colored Higgs mass

SM Higgs mass

M_{GUT}にて、$m_2^2 = 0$とするには fine-tuning が必要

$\boxed{\text{doublet-triplet splitting problem}}$

$v \sim \mathcal{O}(M_{GUT})$, $m \sim \mathcal{O}(M_{GUT})$

13ケタの fine-tuning

$$V(H) = -m^2 |H|^2 + \lambda_3 (|H^2|)^2 \rightarrow$$ WS modelの Higgs potential

$$0 = \frac{\partial V(H)}{\partial H^\dagger} = H\left(-m_2^2 + 2\lambda_3 |H|^2\right)$$

$$\therefore \langle H \rangle = 0, \sqrt{\frac{2\lambda_3}{m^2}}$$

* doublet-triplet splitting problem のいくつかの解

① Sliding singlet mechanism Witten(1981)

idea SU(5) singlet の VEV で ⟨Σ⟩をシフトする.

$$W = \bar{H}(\Sigma + S)H$$

superpotential

SU(5) singlet

$$\langle\Sigma\rangle = \underset{\sim \mathcal{O}(M_{GUT})}{V}\,\mathrm{diag}(2,2,2,-3,-3) \text{ by } W(\Sigma)$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \bar{H}} = (\langle\Sigma\rangle + \langle S\rangle)\langle H\rangle \longleftarrow \langle H\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$\therefore \langle S\rangle = -\langle\Sigma\rangle \Leftrightarrow \langle S\rangle = 3V$$

すなわち, $\langle\Sigma\rangle + \langle S\rangle = V\,\mathrm{diag}(\underbrace{5,5,5}_{\text{triplet mass}},\underbrace{0,0}_{\text{doublet massless}})$

② Missing partner mechanism

(SU(5) Masiero, Nanopoulos
Tamvakis, Yanagida (1982)
Georgi (1982)
Dimopoulos, Wilczek (1981))

idea　SU(5)が破れたあとに、triplet Higgs は Dirac mass をもち、doublet Higgs は massless になるような model をさがす。

$$W \supset \lambda\, 5_H\, 50_H \langle 75_H \rangle + \lambda'\, \bar{5}_H\, \overline{50}_H \langle 75_H \rangle$$

$$50 = (8,2) \oplus (6,3) \oplus (\bar{6},1) \oplus (3,2) \oplus (\bar{3},1) \oplus (1,1)$$

$\cup$

$\boxplus$

- No doublet (1,2) Higgs → massless
- $(\bar{3},1)$ は $5 \supset (3,1)$ と Dirac mass をもつ
  $\Rightarrow \mathcal{O}(M_{GUT})$ massive

(参考) $75 = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \psi^{\{ij\}}_{[kl]} \left(= (50 \otimes 5)_A \right)$

$$= (\bar{3},1) \oplus (\bar{6},2) \oplus (3,2) \oplus (8,1) \oplus (8,3) \oplus (6,2) \oplus (\bar{3},2) \oplus (3,1) \oplus \langle (1,1) \rangle$$

真空期待値

③ Pseudo NG boson mechanism → SU(6) model

global symmetry $\underline{\underline{SU(6)_1 \times SU(6)_2}}$ (diagonal SU(6) is gauged)

Higgs: $\Sigma(35_1)$, $H(6_2)$, $\bar{H}(\bar{6}_2)$

$35 \ni 24 \oplus 5 \oplus \bar{5} \oplus 1$, $\quad 6 = 5 \oplus 1$, $\quad \bar{6} = \bar{5} \oplus 1$

もし、VEVの形を次のように仮定すると、

$$\langle \Sigma \rangle = V \, \mathrm{diag}(1,1,1,1,-2,-2)$$

$$\langle H \rangle = \langle \bar{H} \rangle = v (1,0,0,0,0,0)^T$$

- $SU(6)_1 \xrightarrow{\langle\Sigma\rangle} SU(4)\times SU(2)\times U(1)$

NG bosons $\underbrace{\boxed{(\bar{3},2)_{\frac{5}{6}} \oplus (3,2)_{-\frac{5}{6}}} \oplus \underbrace{(1,2)_{\frac{1}{2}} \oplus (1,2)_{-\frac{1}{2}}}}$

$\dfrac{SU(6)}{SU(4)\times SU(2)\times U(1)}$ eaten

- $SU(6)_2 \xrightarrow[\langle H\rangle,\langle\bar{H}\rangle]{} SU(5)$

NG bosons $\underbrace{\boxed{(3,1)_{-\frac{1}{3}} \oplus (\bar{3},1)_{\frac{1}{3}}} \oplus \underbrace{(1,2)_{\frac{1}{2}}}$ 線形結合

$\oplus \underbrace{(1,2)_{-\frac{1}{2}}} \oplus \boxed{(1,1)_0}$

- gauge symmetry breaking

$$SU(6) \longrightarrow SU(3)\times SU(2)\times U(1)$$

diagonal of $SU(6)_1 \times SU(6)_2$ $\qquad$ $(SU(4)\times SU(2)\times U(1)) \cap SU(5)$

$35-(8+3+1) = \boxed{23 \text{ NG bosons}}$ は.

$\dfrac{SU(6)}{SU(3)\times SU(2)\times U(1)}$ の gauge bosons に eaten

massless doublets $\quad h_1 = \dfrac{v h_\Sigma - 3V h_H}{\sqrt{v^2+9V^2}}, \quad h_2 = \dfrac{v \bar{h}_\Sigma - 3V \bar{h}_{\bar{H}}}{\sqrt{v^2+9V^2}}$ 直交する線形結合

* proton decay (GUTの予言)

GUTでは、quarkとleptonが同じmultipletにうめこまれている。

$\Longrightarrow$ $q \leftrightarrow \ell$ by gauge interaction

protonがleptonにdecayできる。

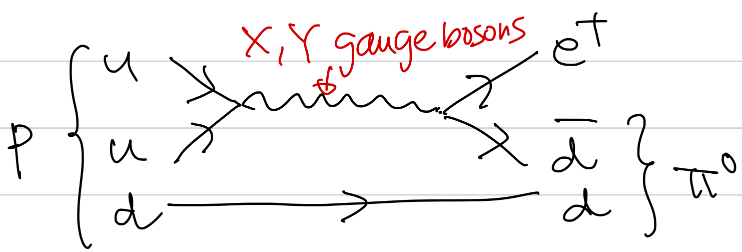
バリオン数が破れる

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & X_1 & Y_1 \\ & & & X_2 & Y_2 \\ & & & X_3 & Y_3 \\ \hline X_1^* & X_2^* & X_3^* & & \\ Y_1^* & Y_2^* & Y_3^* & & \end{array}\right)$$

X, Y gauge bosons

(colorとweak chargeをあわせもつ)

例 (d=6 いろいろある*)



$$\boxed{p \to \pi^0 + e^+}$$

proton lifetime $\tau_p \sim \left[\left(\dfrac{g^2}{M_{GUT}^2}\right)^2 m_p^5\right]^{-1} \dfrac{\hbar}{c^2}$

SU(5) case

$g_{GUT}^2 \sim \frac{1}{40}$

$$\tau_p \simeq \left[\left(\frac{1}{40}\frac{1}{(10^{15})^2}\right)^2 1^5\right]^{-1} \times 6.6\times10^{-25}\,(s)$$

$$\simeq 3\times10^{31}\,(yrs) \quad \left(\text{参} \quad \tau_{universe} \simeq 10^{10}\,(yrs)\right)$$

* カミオカンデ実験 (KAMIOKANDE)

Nucleon Decay Experiment

1983年完成　3000t 超純水　地下1000m

1000コの光電子増倍管

$\tau_p \sim 10^{31}\,(yrs) \Rightarrow 10^{31\sim32}$ コの核子を1年間 observeすると、年平均1コ decay

$$\text{mass} \simeq \frac{10^{31\sim32}}{6\times10^{23}} \simeq 10^{7\sim8}\,(g)$$

$$\simeq 10^{4\sim5}\,kg \simeq 10\sim100t\ 水$$

O(10) events/yr

data $\tau_p > 10^{34}$ yrs → SU(5) GUT 排除

$(p \to \pi^0 + e^+)$

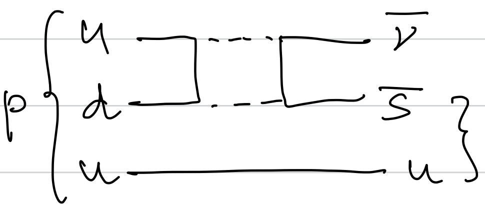
水中で光速を超えて運動

⇒ チェレンコフ光

minimal SUSY SU(5) GUT ⇒ $\tau_p > 10^{35}$ yrs $(p \to e^+ + \pi^0)$

$M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV のため

$\tau_p > 10^{32}$ yrs $(p \to \bar{\nu} + K^+)$



main mode

exp

$\tau_p(p \to \bar{\nu} K^+) > 2.3 \times 10^{33}$ yrs

Super Kamiokande

50000 t, 1996年稼働

11,200 photomultipliers

Hyper Kamiokande

260,000 t, 2027年開始予定

40000 photomul.

SuperKaの10倍のデータ量

proton lifetimeの下限値を1桁 update

* Fermion mass prediction

Yukawa coupling

$\Psi(5^*)\Psi(10)\bar{H}(5^*)$ $\downarrow$ down-type quarks, charged leptons

$\Psi(10)\Psi(10)H(5)$ $\downarrow$ up-type quarks

SU(5) GUTでは
同じYukawa coupling

$$\boxed{m_e = m_d,\ m_\mu = m_s,\ m_\tau = m_b \ @\ M_{GUT}}$$

$\downarrow$ くりこみ群方程式

$$\boxed{\frac{m_b}{m_\tau} \sim \frac{m_s}{m_\mu} \sim \frac{m_d}{m_e} \sim 3 \ @\ 10\,\mathrm{GeV}}$$

データとよい一致

$\left(\begin{array}{l} m_b \sim 4\sim5\,\mathrm{GeV} \\ m_\tau \sim 1.7\sim1.8\,\mathrm{GeV} \end{array} \right)$

Bottom–Tau unification

SU(5) GUTの別の予言

* SO(10) GUT

ν_R: SM singlet required from seesaw mechanism

SO(10)は 16次元スピノル表現 をもつ

$$\boxed{16 = 10_{-1} \oplus 5^*_{+3} \oplus \underbrace{1_{-5}}_{\nu_R}}$$

(SU(5)×U(1) 分解)

10_{-1}: q, u_R^c, e_R^c　　5^*_{+3}: d_R^c, l^c　　1_{-5}: ν_R

1世代の quarks と leptons が 1つの表現にうめこめる。(右巻き ν も含めて)

◎ gauge boson = adjoint rep. of SO(10)

$$\underbrace{45 = 24}_{} \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 1 \quad (\text{SU(5) 分解})$$

24: SU(5) gauge bosons

◎ GUT symmetry breaking

$$\begin{cases} ① \; SO(10) \to SU(5) \to SU(3)\times SU(2)\times U(1) \\ ② \; SO(10) \to SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4) \\ \qquad\qquad \to SU(2)_L \times U(1) \times SU(3) \end{cases}$$

① $SO(10) \to SU(5)$?

$SO(10)$の極大部分群：$SU(5)\times U(1)$

◎ $SO(10)$ rep. の $SU(5)\times U(1)$分解いくつか

$$\begin{cases} 10 = 5_2 \oplus 5^*_{-2} \quad \text{(vector)} \\ 45 = 24_0 \oplus 10_4 \oplus 10^*_{-4} \oplus \underline{1_0} \quad (日) \\ 54 = 15_4 \oplus 15^*_{-4} \oplus 24_0 \quad (□□-1) \\ 120 = 5_2 \oplus 5^*_{-2} \oplus 10_{-6} \oplus 10^*_6 \oplus 45_2 \oplus 45^*_{-2} \quad (目) \\ 126 = \underline{1_{-10}} \oplus 5^*_{-2} \oplus 10_{-6} \oplus 15^*_6 \oplus 45_2 \oplus 50^*_{-2} \quad (目/2) \\ 210 = \underline{1_0} \oplus 5_{-8} \oplus 5^*_8 \oplus 10_4 \oplus 10^*_{-4} \oplus 24_0 \oplus 40_{-4} \oplus 40^*_4 \oplus 75_0 \quad (目) \\ 16 = 10_{-1} \oplus 5^*_3 \oplus \underline{1_{-5}} \quad \text{(spinor)} \end{cases}$$

* GUT Higgsの候補

SU(5)分解したときに SU(5) singlet を含む

i.e. $\boxed{16, 45, 126, 210}$ ——— (*)

16 or 16^*, 126 or 126^*

Yukawa coupling $= \underbrace{16_i 16_j (\text{Higgs})}_{SO(10)\ \text{invariant}}$

$\supset 1\ 1\ (\text{Higgs})$ ν_R mass term

ν_R

seesaw mechanism により

$M_{\nu_R} \sim 10^{14\sim15}$ GeV であることを思いだすと、

GUT Higgs は、ν_R に mass を与えるべき。

Yukawa coupling が SO(10) invariant のためには、

Higgs $= \boxed{10 \text{ or } 120 \text{ or } 126^*}$ ——(**)

∵ $16 \otimes 16 = 10 \oplus 120 \oplus 126$ なので、
Higgs の表現は、これらとのテンソル積に
singlet "1" を含むものである。

上記の表現 10, 120, 126^* に対して、

$$\begin{cases} 10 \otimes 10 = 1 \oplus 45 \oplus 54 \\ 120 \otimes 120 = 1 \oplus 45 \oplus 54 \oplus 210 \oplus 210 \oplus 770 \\ \qquad \oplus 945 \oplus 1050 \oplus 1050^* \oplus 4125 \\ \qquad \oplus 5940 \\ 126 \otimes 126^* = 1 \oplus 45 \oplus 210 \oplus 770 \oplus 5940 \oplus 8910 \end{cases}$$

(*), (*)(*) ⇒ 126^* が better

ボーナスとして、M_{GUT} で SM fermion が massless になることが自動的に実現

∵ $16\,16\,126^*_H \supset 1 \otimes 1 \otimes 1 + \underbrace{(10+5^*) \otimes (10+5^*) \otimes 1}_{\text{SU(5) invariant ではない}}$

SM Yukawa

SU(5) 分解

SO(10)の枠組みで、SM fermion Yukawa は、
10 rep を Higgs として用いる。

$$16\ 16\ 10_H \supset \underbrace{10\ 10\ 5_H}_{\text{up type quarks}} \oplus \underbrace{10\ 5^*\ 5^*_H}_{\text{down-type quarks, charged leptons}}$$

$$\begin{pmatrix} 10 = Q, u_R, e_R \\ 5^* = l, d_R \end{pmatrix}$$

$$* \quad SO(10) \xrightarrow{\langle 126^* \rangle} SU(5) \xrightarrow{?} SU(3)\times SU(2)\times U(1)$$

45 rep が <u>24 rep</u> をもつことに着目

$$(45) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \otimes i\sigma_2 \qquad i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

↑

2nd anti-sym tensor

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & a_2 & & & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & a_3 & & & & \\ & & & & -a_3 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & a_4 & & \\ & & & & & & -a_4 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & a_5 \\ & & & & & & & & -a_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ が unbroken であるためには、

$$(45) = \begin{pmatrix} a_1 I_2 \otimes i\sigma_2 & 0 \\ 0 & a_2 I_3 \otimes i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad \text{ととる}$$

$[(45), \underset{\substack{\uparrow \\ SO(10)\text{ generator}}}{T^a}] = 0$ をみたす T^a は次の形にかける。

$$\Rightarrow \boxed{T^a = \begin{pmatrix} A_2 \otimes I_2 + S_2 \otimes \sigma_2 & 0 \\ 0 & A_3 \otimes I_2 + S_3 \otimes \sigma_2 \end{pmatrix}}$$

(A_n : $n\times n$ anti-sym matrices
S_n : $n\times n$ sym matrices)

check

$$[I_2 \otimes i\sigma_2, A_2 \otimes I_2 + S_2 \otimes \sigma_2]$$
$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & -iS_2 \\ iS_2 & A_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} iS_2 & A_2 \\ -A_2 & iS_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iS_2 & A_2 \\ -A_2 & iS_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{O.K.}$$

$$[I_3 \otimes i\sigma_2,\ A_3 \otimes I_2 + S_3 \otimes \sigma_2]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_3 & -iS_3 \\ iS_3 & A_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} iS_3 & A_3 \\ -A_3 & iS_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iS_3 & A_3 \\ -A_3 & iS_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{O.K.}$$

$\left(\begin{array}{l} A_2 \propto \sigma_2 \\ S_2 \propto \sigma_{1,3},\ \mathbb{1}_{2\times2} \text{ の線形結合} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ 2×2 blockは $SU(2)\times U(1)$ を生成

$\left(\begin{array}{l} A_3 \propto \lambda_{1,2,4,5,6,7} \text{ の線形結合} \\ S_3 \propto \lambda_{3,8},\ \mathbb{1}_{3\times3} \text{ の線形結合} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ 3×3 blockは $SU(3)\times U(1)$ を生成

$$\Rightarrow SU(5) \xrightarrow{\langle 45 \rangle} SU(3)\times SU(2)\times U(1)$$

(注 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times U(1)$ となりそうだが、
$(126^*) \ni \langle 1_{10} \rangle$ で $SU(5)\times U(1)$ の $U(1)$ が broken なので、
$SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times U(1)$ とはならない)

left-right symmetric

② $SO(10) \longrightarrow SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$ Pati-Salam GUT

$\longrightarrow SU(2)_L \times U(1)_Y \times SU(3)_C$

lepton number as the 4th color

LH $(q, \ell)_L$

$(2,1,4) = (2,1,3) \oplus (2,1,1)$

RH

$(1,2,4) = (1,2,3) \oplus (1,2,1)$ $\begin{pmatrix} u & \nu \\ d & e \end{pmatrix}_R$

③ SO(10)表現の $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$ 分解 いくつか

$$\begin{cases}
10 = (2,2,1) \oplus (1,1,6) \\
16 = (2,1,4) \oplus (1,2,4^*) \\
45 = (3,1,1) \oplus (1,3,1) \oplus (1,1,15) \oplus (2,2,6) \\
54 = \underline{(1,1,1)} \oplus (3,3,1) \oplus (1,1,20) \oplus (2,2,6) \\
120 = (2,2,1) \oplus (1,1,10) \oplus (1,1,10^*) \oplus (3,1,6) \\
\qquad \oplus (1,3,6) \oplus (2,2,15) \\
126 = (1,1,6) \oplus (3,1,10^*) \oplus (1,3,10) \oplus (2,2,15) \\
210 = \underline{(1,1,1)} \oplus (1,1,15) \oplus (2,2,6) \oplus (3,1,15) \\
\qquad \oplus (1,3,15) \oplus (2,2,10) \oplus (2,2,10^*)
\end{cases}$$

$6_{-\frac{2}{3}} \oplus 3_{-\frac{5}{3}} \oplus 1_2 \; (SU(3) \times U(1))$

* Symmetry breaking

$$SO(10) \xrightarrow[\text{or } \langle 210 \rangle]{\langle 54 \rangle} SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)$$

$$\underset{\langle 210 \rangle \supset \langle (1,3,15) \rangle}{\longrightarrow} SU(2)_L \times U(1)_R \times SU(3)_C \times \underbrace{U(1)_{B-L}}$$

$$\underset{\langle 126 \rangle \supset \langle (1,3,10) \rangle}{\longrightarrow} SU(2)_L \times \underbrace{U(1)_Y}_{/\!/} \times SU(3)_C$$

$$\frac{Y}{2} = I_{3R} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, I_{B-L} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

⊙ check of hypercharges

$$\frac{Y}{2} = I_{3R} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, I_{B-L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &Y(q_L) = \frac{1}{3}, \quad Y(\ell) = -1 \\ &Y(u_R) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad Y(\nu_R) = 1 - 1 = 0 \\ &Y(d_R) = -1 + \frac{1}{3} = \frac{-2}{3} \qquad Y(e_R) = -1 - 1 = -2 \end{aligned}}$$

* E_6 GUT

$$\begin{cases} \text{fundamental rep.} \quad 27 = 16_1 \oplus 10_{-2} \oplus 1_4 \\ \text{adjoint rep.} \quad 78 = 45_0 \oplus 1_0 \oplus 16_{-3} \oplus 16^*_3 \end{cases}$$

$SO(10) \times U(1)$ 分解

E_6 breaking pattern はたくさんある。

たとえば

<u>1-step breaking</u>

$$E_6 \longrightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

$\langle 351 \rangle_{sym}$ & $\langle 351 \rangle_{anti\text{-}sym}$

$\because \quad 27 \times 27 = 27^* \oplus 351_{sym} \oplus 351_{anti\text{-}sym}$

VEV

$$\begin{cases} 351_{sym} = 1_{-8} \oplus 10_{-2} \oplus 16_{-5} \oplus 54_4 \oplus 126_{-2} \oplus 144_1 \\ 351_{anti\text{-}sym} = 10_{-2} \oplus 16_{-5} \oplus 16_1 \oplus 45_4 \oplus 120_{-2} \oplus 144_1 \end{cases}$$

VEV

$SO(10) \times U(1)$ 分解

$(1,1,0)$ under $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ が含まれている

のは、$SU(5)$の 24, 75 のみ

$\cap$

$SO(10)$の45

Motivation of Supersymmetry

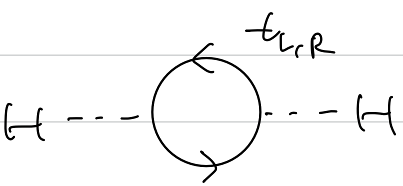
① gauge hierarchy problem の解

② gauge coupling unification

③ dark matter

§ Solution to the gauge hierarchy problem

SMにおいて、Higgs $(\text{mass})^2$ の 1-loop correction のうち、top quark loop の寄与が支配的



$$\mathcal{L}_{top} = -\frac{y_t}{\sqrt{2}} H \bar{t}_L t_R + h.c.$$

$$m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}} \langle H \rangle$$

color

$$\Delta M_H^2(\text{top}) = -N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{i}{\not{k} - m_t} \left(\frac{-i y_t}{\sqrt{2}} \right) \frac{i}{\not{k} - m_t} \left(\frac{-i y_t^*}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

fermion loop

$$= -\frac{N_c}{2} |y_t|^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{Tr}\left[(\not{k} + m_t)^2 \right]}{(k^2 - m_t^2)^2}$$

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{k}+m_t)^2\right] = \mathrm{Tr}(k^2 + 2 m_t \not{k} + m_t^2) = 4(k^2 + m_t^2)$$

$$= -\frac{i N_c}{8\pi^2} |y_t|^2 \left[-\Lambda^2 + 3 m_t^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2 + m_t^2}{m_t^2}\right) + (\text{finite} @ \Lambda \to \infty) \right]$$

Wick rotation
cutoff integral
(Λ)

cutoff scaleについて、2次の依存性
(2次発散)

この2次発散を cancel するために、

N コの Scalars ϕ_L, ϕ_R を新たに導入する

$$\mathcal{L}_{\substack{\text{scalar}\\ \text{interaction}}} = -\frac{\lambda}{2} H^2 \left(|\phi_L|^2 + |\phi_R|^2 \right) - H \left(\mu_L |\phi_L|^2 + \mu_R |\phi_R|^2 \right) - m_L^2 |\phi_L|^2 - m_R^2 |\phi_R|^2$$

Scalar loop による Higgs $(\text{mass})^2$ への寄与

Fig 1

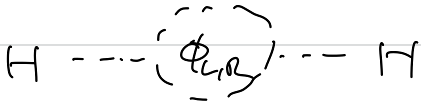


Fig 2

$$\text{Fig 1} = -i\lambda N \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{i}{k^2-m_L^2}+\frac{i}{k^2-m_R^2}\right]$$

$\frac{1}{2}$ が消えるのは
Hと2通りの
縮約で相殺

$$= \frac{-i\lambda N}{16\pi^2}\left[2\Lambda^2 - \sum_{i=L,R} m_i^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2+m_i^2}{m_i^2}\right) + (\text{finite})\right]$$

Wick rotation
cutoff integral

$$\mathrm{Fig}\,2 = N\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\left(\frac{i}{k^2-m_L^2}(-i\mu_L)\right)^2 + (L\leftrightarrow R)\right]$$

$$= \frac{iN}{16\pi^2}\left[\sum_{i=L,R}\mu_i^2\ln\left(\frac{\Lambda^2+m_i^2}{m_i^2}\right) + (\text{finite})\right]$$

$$\Lambda^2 : \quad \frac{iN_c}{8\pi^2}|y_t|^2 - \frac{i\lambda N}{8\pi^2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{N = N_c\,,\quad |y_t|^2 = \lambda}$$

$$\ln\Lambda^2 : \quad -\frac{3N_c}{8\pi^2}i|y_t|^2 m_t^2 + \frac{i\lambda N}{16\pi^2}(m_L^2+m_R^2)$$

$$+\frac{iN}{16\pi^2}(\mu_L^2+\mu_R^2) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{m_L^2 = m_R^2 = m_t^2\,,\quad \mu_L^2 = \mu_R^2 = 2\lambda m_t^2}$$

この条件をみたすのが: Supersymmetry

Boson $\leftrightarrow$ Fermion

SUSYが破れたあとでは、

$$\delta m_H^2 \sim \frac{g^2}{16\pi^2} m_{\tilde{t}}^2 \log\left(\frac{m_{\tilde{t}}^2}{m_t^2}\right)$$

$m_{\tilde{t}} \sim O(\mathrm{TeV})$であれば、

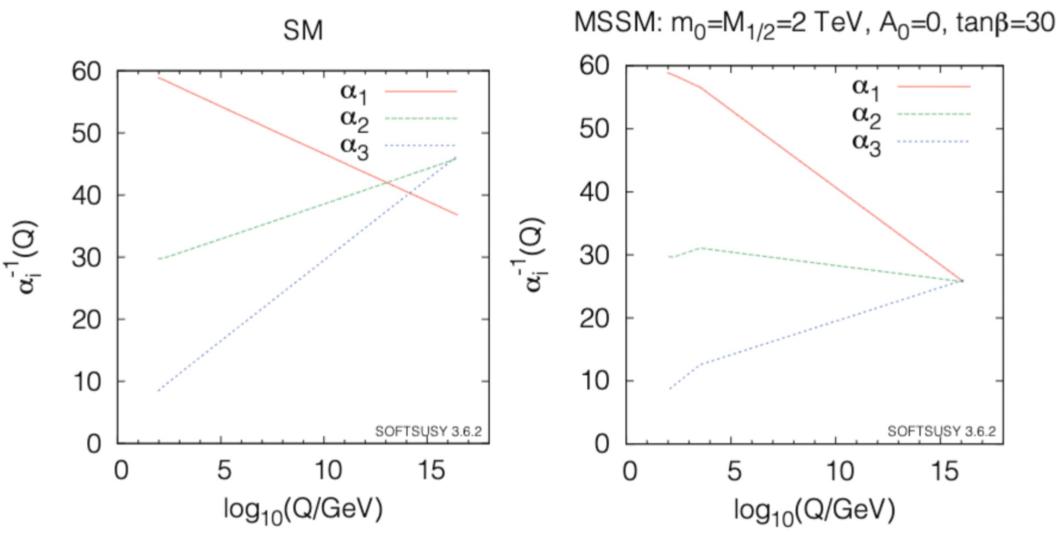
$$\delta m_H^2 \sim O\left((100\,\mathrm{GeV})^2\right)$$

(Higgs massについては後述)

§ Gauge coupling unification

LEP 実験

low energy における gauge coupling の精密測定が進むと、Standard model では、gauge coupling が統一せず、MSSM では、よく一致することがわかった。



$\mathcal{O}$(TeV) の SUSY particles の寄与により unification が実現

§ Dark matter

Dark matterがみたすべき条件

1. EM neutral
2. massive
3. stable

これらをみたすStandard model粒子として、neutrinoがあるが、残存量を説明できない

→ Beyond the Standard Model

SUSYでは、最も軽いSUSY粒子が候補
LSP (Lightest Super Particle)

- ◎ lightest neutralino → もっともfamiliar
  $\tilde{B}$ (bino), $\tilde{W}^0$ (wino) $\tilde{H}_u^0$, $\tilde{H}_d^0$ (higgsino)
- ◎ gravitino (→ 後述)
- ◎ sneutrino → direct searchでほぼexcluded

* Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM)

Standard model を SUSY 拡張した最小模型

◎ quarks, lepton ⇒ scalar field と多重項

↳ squark, slepton

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ q \end{pmatrix}_L \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ u \end{pmatrix}_R \quad \bar{D} = \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ d \end{pmatrix}_R \quad L = \begin{pmatrix} \tilde{l} \\ l \end{pmatrix}_L \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ e \end{pmatrix}_R$$

◎ W, Z, γ, G ⇒ fermion field と多重項

↳ gaugino

wino　zino　photino　gluino

$$V_W = \begin{pmatrix} \tilde{W}_\mu \\ W_\mu \end{pmatrix} \quad V_Z = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \quad V_\gamma = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_\mu \\ \gamma_\mu \end{pmatrix} \quad V_G = \begin{pmatrix} \tilde{g}_\mu \\ g_\mu \end{pmatrix}$$

(それぞれの多重項に正確には補助場が必要で省略している)

↑ EOM などで SUSY Lagrangian を構成

$$\begin{cases} Q = \tilde{q} + \sqrt{2}\theta q + F_q \\ V = \bar{\theta}\sigma^\mu\theta V_\mu + i\theta\lambda + i\bar{\theta}\bar{\lambda} + \theta^2 D \end{cases}$$

⑨ Higgs scalar field は、fermion field と多重項

しかし、MSSMでは以下の理由から最低

2つは必要

① Higgs field と多重項をなす fermion は

Weyl fermion であるため、 Higgsino

$(SU(2)_L)^2 U(1)_Y$ アノマリー

をもつ

$SU(2)_L$ Witten アノマリー

② SM Yukawa coupling (quark)

$$\mathcal{L} = \underbrace{Y_d \bar{d} H Q}_{} + \underbrace{Y_u \bar{u} \tilde{H} Q}_{}$$

↓ そのままSUSY化できる

↓ $\tilde{H} = i\sigma^2 H^*$ のために そのままSUSY化できない (複素共役場がマズい)

以上より、up-type quark に結合する

Higgs $\begin{cases} \text{scalar} \\ \text{fermion} \end{cases}$ を導入する (複素共役でなく)

最も一般的なくりこみ可能なポテンシャル項は、

$$\mathcal{L}_1 = \underbrace{\int d^2\theta}_{\theta^2\text{項をとりだす}} \Big[\underbrace{Y_u^{ij} Q^i H_u \bar{U}^j}_{\text{up-type yukawa}} + \underbrace{Y_d^{ij} Q^i H_d \bar{D}^j}_{\text{down-type yukawa}}$$

$$+ \underbrace{Y_e^{ij} L^i H_d \bar{E}^j}_{\text{charged lepton yukawa}} + \underbrace{\mu H_u H_d}_{\mu\text{-term}} \Big]$$

μ-term $\to$ $\mu \tilde{H}_u \tilde{H}_d$ (Higgsino mass)

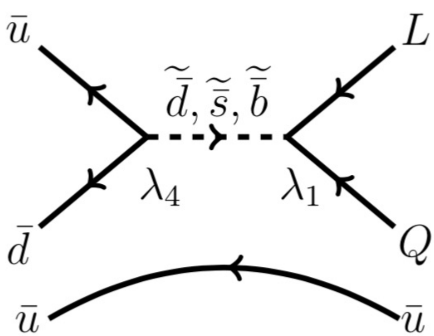
$$\left(\begin{array}{l} Q = \tilde{q} + \sqrt{2}\,\theta q + \theta^2 F_q \quad \text{etc} \\ i, j = 1, 2, 3 \quad \text{世代数} \end{array} \right)$$

θ : グラスマン数

$$\mathcal{L}_2 = \int d^2\theta \Big[\lambda_1^{ijk} Q^i L^j \bar{D}^k + \lambda_2^{ijk} L^i L^j E^k$$
$$+ \lambda_3 L^i H_u + \lambda_4^{ijk} \bar{D}^i \bar{D}^j \bar{U}^k \Big]$$

→ $\cancel{B}$ and/or $\cancel{L}$ interactions

実際、squark exchange で proton decay がおこる。



$p \to e^+ \pi^0$ or $\bar{\nu} \pi^+$

(← from Csaki's lecture note)

squark mass は、SUSY breaking scale で
通常 $\mathcal{O}(\mathrm{TeV})$ なので、これらの interaction を
suppress させなければならない

シンプルな方法は、matter parity を課す

Z_2 symmetry $\quad P_M = (-1)^{3(B-L)}$

$$\begin{cases} P_M(q) = (-1)^{3\times\frac{1}{3}} = -1 \\ P_M(\ell) = (-1)^{3\times(-1)} = -1 \\ P_M(\text{Higgs}) = (-1)^0 = +1 \\ P_M(\text{gauge}) = (-1)^0 = +1 \end{cases}$$

superpartner も同じ parity

$$P_M(\text{yukawa}) = P_M(\mu\text{-term}) = +1$$

$$P_M(QLD) = P_M(LLE) = P_M(LH_u)$$
$$= P_M(\bar{U}\bar{D}\bar{D}) = -1$$

通常は、matter parity の拡張である R-parity を課す。

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \qquad s \to \text{spin}$$

$\longrightarrow$

SM particle	+1
superparticle	−1

(spin による区別)

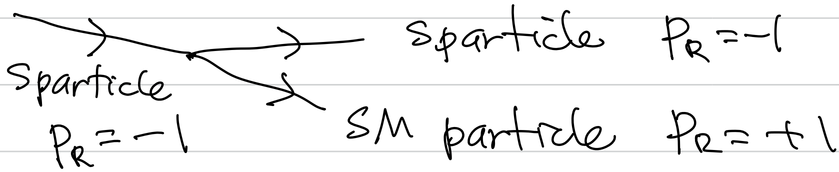
matter parity の保存 $\Longleftrightarrow$ R-parity の保存

∵ Lorentz 不変な理論であれば、matter である q, ℓ をかならず偶数個含む

$\Rightarrow$ $(-1)^{2S}$ factor はつねに $+1$

* R-parity 保存からの帰結

① 最も軽い superparticle は安定である



最軽量の superparticle は、反応先がない

Lightest supersymmetric particle (LSP)

② LSP が、EM neutral & color singlet

$\Rightarrow$ WIMP DM の候補

② LSP 以外の super particle は、LSP が でるまで decay する

③ Collider 実験では、始状態が SM 粒子で $P_R = +1$ なので、Sparticle は対生成し、LSP まで decay する。LSP は missing energy として identify

SUSY breaking

現実世界では、SUSYは成立していない
もし SUSYが成立 $\Longleftrightarrow$ $m_{boson} = m_{fermion}$

SUSY breaking の問題は、2つの側面がある
① SUSYを自発的に破るメカニズム
② SUSYの破れを、MSSMに伝達するメカニズム

①について

SUSY代数 $\{Q, \overline{Q}\} = 2\sigma^\mu P_\mu$ $\quad \sigma^\mu = (1, \sigma^i)$

$Q, \overline{Q}$: SUSY変換の生成子 (boson $\longleftrightarrow$ fermion)

P_μ : 並進演算子

SUSY変換を2回作用 = 並進

この代数より $P_\mu = \frac{1}{4}\overline{\sigma}_\mu \{Q, \overline{Q}\}$ なので

$$\underbrace{H}_{\text{Hamiltonian}} = P_0 = \frac{1}{4}\left(Q_1\overline{Q}_1 + \overline{Q}_1 Q_1 + Q_2\overline{Q}_2 + \overline{Q}_2 Q_2\right)$$

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{4}\langle 0|Q_1\overline{Q}_1 + \overline{Q}_1 Q_1 + Q_2\overline{Q}_2 + \overline{Q}_2 Q_2|0\rangle$$

→ $\begin{cases} = 0 \iff Q|0\rangle = 0 & \text{SUSY is unbroken} \\ \neq 0 \iff Q|0\rangle \neq 0 & \text{SUSY is broken} \end{cases}$

→ 真空でのエネルギー $\langle 0|H|0\rangle$ が SUSY の order parameter

(注 SUSY を gauge 化した SUGRA では、この性質は成立しない)

また、真空の(ポテンシャル)エネルギーは、補助場 F, D の期待値の和でかける

$$V = \underbrace{\sum_i |\langle F_i\rangle|^2}_{\substack{\text{matter multiplet}\\ \text{からの寄与}\\ \text{"F-type breaking"}}} + \underbrace{\sum_a \frac{g^2}{2}(\langle D^a\rangle)^2}_{\substack{\text{vector multiplet}\\ \text{からの寄与}\\ \text{D-type breaking}}}$$

どのような理論において、SUSYが破れるか？

通常は、$\underbrace{\langle D^a \rangle}_{\parallel} = 0$ をみたす解が容易に

$\sum_i \langle \phi_i^\dagger \rangle T^a \langle \phi_i \rangle$ (T^a: generator)

得られるので、そのVEVのもとで、$\langle F_i \rangle \neq 0$
となる理論を探す。

探す上で重要な性質

① 非くりこみ定理 (non renormalization theorem)

② Witten指数

① 非くりこみ定理

相互作用項(スーパーポテンシャル)が摂動の範囲内で量子補正をうけない

スーパーポテンシャル

$\Rightarrow \quad F_i = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial \Phi_i}\right)^*$ より 古典レベルで

$\langle F_i \rangle = 0$ ならば $\langle F_i \rangle = 0$ @ any loop

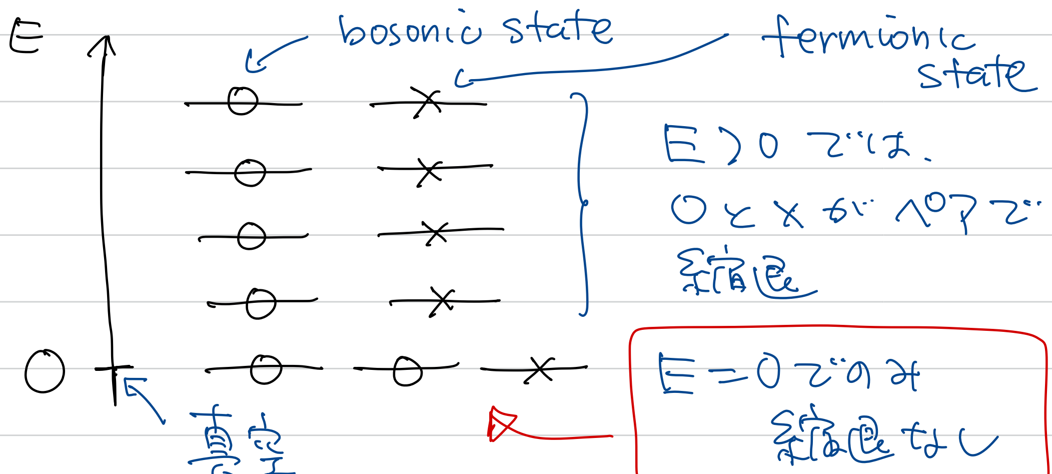
$\boxed{\langle F_i \rangle \neq 0 \text{ by non-perturbative effects}}$

Dynamical SUSY Breaking

② Witten指数 $= \mathrm{Tr}(-1)^F$ （F: フェルミオン数）

Witten指数は、SUSY真空の数をカウント

∵ SUSY理論のエネルギースペクトル



E > 0 では、○と×がペアで縮退

$\boxed{E = 0 \text{ でのみ縮退なし}}$

よって. $\boxed{\mathrm{Tr}(-1)^F \neq 0 \Rightarrow \text{SUSY}}$

$\downarrow$

Super Yang-Mills theory
Massive Super QCD
} 破れない

$\downarrow$

Chiral SQCD で、SUSYを破るmodelを作る（massless SQCD + Singletで破れる例外あり）

② 超対称性の破れの伝達機構

①で生成した超対称性の破れをどのように
Standard model へ伝えるか？

一番 simple なのは、MSSM の枠内で
SUSY の破れがダイレクトに伝達する。

→ これはうまくいかない

∵ SUSY mass sum rule

$$\underbrace{\mathrm{Str}}_{\text{supertrace}}\, m^2 = \sum_{J:\,\mathrm{spin}} (2J+1)(-1)^{2J} m_J^2$$

$$= \underbrace{(m^2 + F) + (m^2 - F)}_{\text{boson}}$$

F-type SUSY breaking

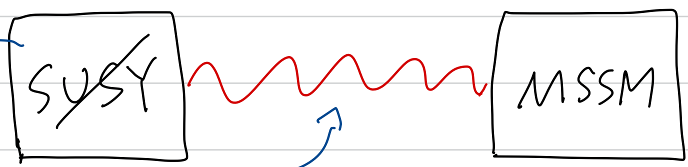
$$- 2 \times m^2$$ ← fermion

(ex. クォークの場合、かならずクォークより軽い
スカラークォークが存在する → 未発見)

アップクォーク：1〜3 MeV

超対称性が破れるセクターとMSSMセクターを分ける必要がある。

neutral under the SM gauge group



~~SUSY~~の伝達機構 (mediation mechanism)

この部分をどのinteractionで伝達させるかで、バラエティがある

- gravity mediation $\longrightarrow$ gravity
- gauge mediation $\longrightarrow$ SM gauge int.
- anomaly mediation $\longrightarrow$ superconformal anomaly
- gaugino mediation
- Dirac gaugino mediation

  } gaugino
- Radion mediation $\longrightarrow$ radion

⋮

* Soft SUSY breaking terms in MSSM

SUSYの破れをパラメトライズし、
2次発散を新たに生じない項が分類済

$$\mathcal{L}_{soft} = -\frac{1}{2}\left(M_3 \tilde{g}\tilde{g} + M_2 \tilde{W}\tilde{W} + M_1 \tilde{B}\tilde{B}\right) + h.c.$$

$$-\left(A_u \tilde{q} H_u \tilde{\bar{u}} + A_d \tilde{q} H_d \tilde{\bar{d}} + A_e \tilde{l} H_d \tilde{\bar{e}}\right) + h.c.$$

gaugino mass

A-term
(Yukawa相互作用のSUSY版)

$$-\left(m_{\tilde{q}}^2 \tilde{q}^\dagger \tilde{q} - m_{\tilde{u}}^2 \tilde{u}^\dagger \tilde{u} - m_{\tilde{d}}^2 \tilde{d}^\dagger \tilde{d} - m_{\tilde{l}}^2 \tilde{l}^\dagger \tilde{l} - m_{\tilde{e}}^2 \tilde{e}^\dagger \tilde{e} - m_{H_u}^2 h_u^\dagger h_u - m_{H_d}^2 h_d^\dagger h_d\right)$$

Non-holomorphic scalar mass

$$-\left(\underbrace{B h_u h_d + h.c.}\right)$$

B-term (holomorphic scalar mass)

これらのパラメタは、SUSYの伝達機構を指定しないかぎりフリー

どの伝達機構を採用するかで、SUSYパラメタのパターンが決まる。

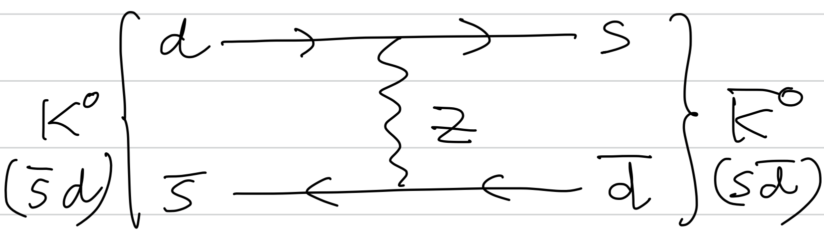
⟹ SUSYの検証において重要な情報

どの伝達機構を採用するかの criterion の1つとして，SUSY flavor problem の回避がある

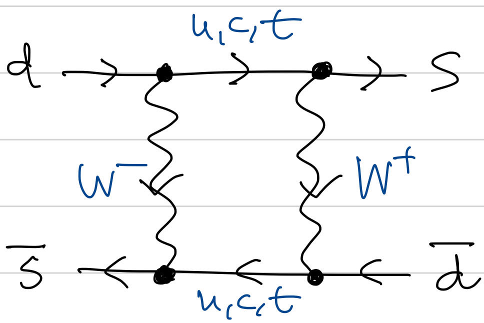
FCNC process をいかにして suppress させるか？

ex. K^0-$\overline{K^0}$ mixing → Flavor changing neutral current

SM → GIM mechanism により suppressed



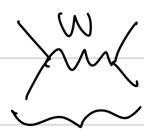
$= 0$ by unitarity of CKM matrix



"Box diagram"

$$\approx \frac{g^4}{16\pi^2}\frac{(m_c^2-m_u^2)^2}{M_W^4 m_c^2}(\sin\theta_c\cos\theta_c)^2$$

$$\approx 10^{-4}\left(\frac{m_c}{M_W}\right)^2 \times$$



β-decay

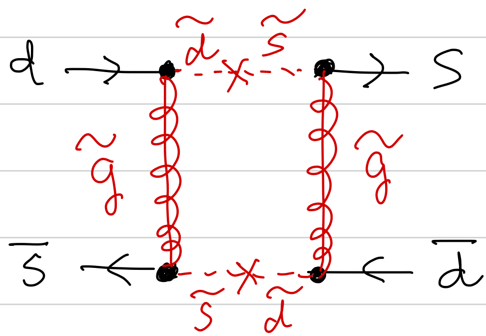
$m_c \gg m_u$

実験データから $m_c \simeq 1.4\,\mathrm{GeV}$ 予言

MSSM における squarks と sleptons の mass matrix と SM yukawa matrix は一般に同時対角化できない

→ New sources of flavor violation

K^0–$\bar{K}^0$ mixing の例だと、



$$\approx \alpha_3^2 \frac{\left(m_{\tilde{d}}^2 - m_{\tilde{s}}^2\right)^2}{m_{SUSY}^4} \frac{1}{m_{SUSY}^2}$$

(m_{SUSY} : ~~SUSY~~ scale)

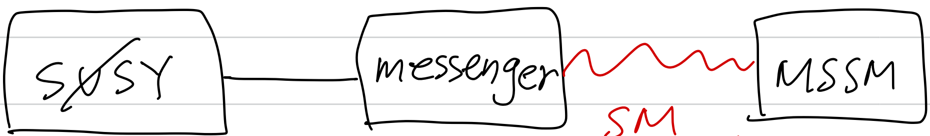
実験データと比較すると、

$$\boxed{\frac{m_{\tilde{d}}^2 - m_{\tilde{s}}^2}{m_{SUSY}^2} \lesssim 4 \times 10^{-3} \left(\frac{500\,\mathrm{GeV}}{m_{SUSY}}\right)}$$

Sfermion masses are highly universal in flavor space

* Gauge mediation of $\cancel{\text{SUSY}}$

flavor universality を自然に実現する



$\langle F_X \rangle \neq 0$

$\Phi, \bar{\Phi}$

SM gauge interaction (flavor universal)

SM gauge group について vector-like なカイラル多重項

典型的には SU(5) の $5, \bar{5}$

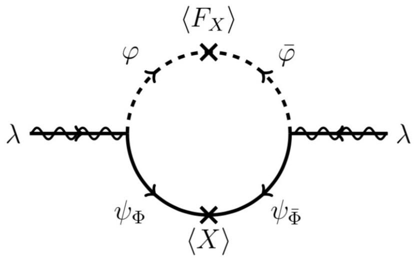
① 何らかのメカニズムで SUSY が破れる

② $\cancel{\text{SUSY}}$ セクターの場 X と messenger $\bar{\Phi}, \Phi$ の間に相互作用 $\boxed{W = X\Phi\bar{\Phi}}$ を仮定

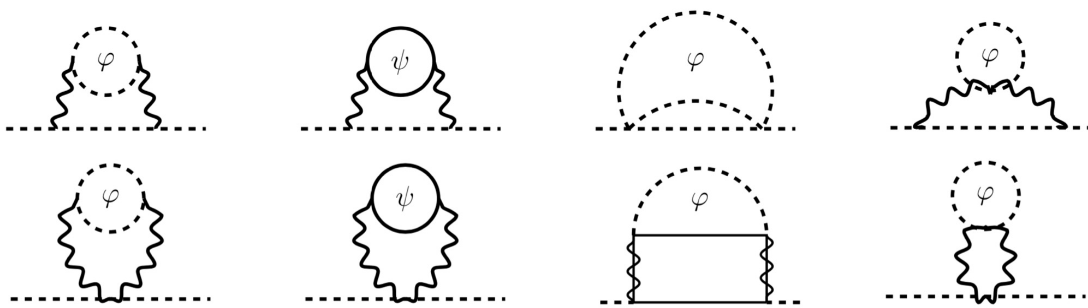
③ messenger multiplet の scalar, fermion の間に mass splitting

$$m_\phi^2 = |\langle X \rangle|^2 \pm \langle F_X \rangle, \quad m_\psi = \langle X \rangle$$

④ このmass splittingがloop diagramを通じて、MSSMへ伝達



$$\Rightarrow \boxed{M_i = \frac{g_i^2}{16\pi}\frac{\langle F_X\rangle}{\langle X\rangle}}$$



$$\Rightarrow \boxed{m^2 \sim \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 \underset{\sim}{C_i} \left(\frac{\langle F_X\rangle}{\langle X\rangle}\right)^2}$$

2次のカシミア因子

$$\sum_a (T^a_R T^a_R) = C_R \mathbb{1}$$

flavor universal

スペクトルの特徴

- gaugino mass $\simeq$ sfermion mass

- $M_3 : M_2 : M_1 = \alpha_3 : \alpha_2 : \alpha_1$

- $m_{\tilde{q}}^2 : m_{\tilde{\ell}}^2 : m_{\tilde{e}}^2 = \frac{4}{3}\alpha_3 : \frac{3}{4}\alpha_2 : \frac{3}{5}\alpha_1$

- $M_i \simeq m \simeq \mathcal{O}(1\,\mathrm{TeV})$

$$\Rightarrow \frac{\langle F_X \rangle}{\langle X \rangle} \sim \mathcal{O}(100\,\mathrm{TeV})$$

$$\langle F_X \rangle \sim \mathcal{O}(100\,\mathrm{TeV}) \times \underbrace{\langle X \rangle}_{\text{伝達スケール} < M_P}$$

$$< \mathcal{O}(100\,\mathrm{TeV}) \times M_P \sim 10^{24}\,\mathrm{GeV}^2$$

$\langle X \rangle \sim \sqrt{\langle F_X \rangle}$ とすれば $\langle F_X \rangle \sim 10^{10}\,\mathrm{GeV}^2$

graviton (spin 2) の superpartner

spin $3/2$

gravitino mass

$$m_{3/2} \sim \frac{\langle F_X \rangle}{\sqrt{3} M_p} \sim \frac{10^{10}}{\sqrt{3} \times 10^{19}}$$

Supergravity から

$\langle F_X \rangle \sim 10^{10}\,\mathrm{GeV}^2$

$\sim \mathcal{O}(0.1\,\mathrm{eV}) \longrightarrow$ LSP

DM candidate

§ EW symmetry breaking in MSSM

MSSMでは、Higgs 2重項が2つ必要
(2 Higgs doublet model の1つ)

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} \quad H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$$

<u>Higgs potential</u>

SMでは free parameter "λ" であるが gauge coupling になる

$$V_H = \underbrace{\frac{g^2}{2}\left|H_u^+ H_d\right|^2 + \frac{1}{8}(g^2+g'^2)\left(|H_u|^2-|H_d|^2\right)^2}_{\text{gauge interaction 由来の4次項}}$$

$$+ \underbrace{|\mu|^2\left(|H_u|^2+|H_d|^2\right)}_{\text{SUSY 不変な 2次項}}$$

$$+ \underbrace{m_u^2|H_u|^2+m_d^2|H_d|^2 + (B\, H_u\cdot H_d + h.c.)}_{\text{soft SUSY の2次項 (B-term)}}$$

neutral componentに着目すると、

$$V_H^0 = \frac{1}{8}(g^2+g'^2)\left(|H_u^0|^2-|H_d^0|^2\right)^2$$

$$+\sum_{i=u,d}\left(|\mu|^2+m_{H_i}^2\right)|H_i^0|^2-2B\,\mathrm{Re}\left(H_u^0H_d^0\right)$$

EW symmetry breaking conditions

① neutral Higgs mass matrixの固有値のうち 1つは negative

$$\begin{pmatrix} H_u^{0*} & H_d^{0*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mu|^2+m_{H_u}^2 & -B \\ -B & |\mu|^2+m_{H_d}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_d^0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(|\mu|^2+m_{H_u}^2\right)\left(|\mu|^2+m_{H_d}^2\right)-B^2<0}$$

$(\det < 0)$

② $|H_u^0| = |H_d^0|$ の方向 (D-flat direction) で
$(\text{mass})^2$ が positive

$$\Rightarrow \quad \boxed{2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 - 2B > 0}$$

①, ② の条件で、 $m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$ とすると、

$$\begin{cases} (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)^2 < B^2 \\ |\mu|^2 + m_{H_u}^2 > B \end{cases}$$

となり矛盾

これは、SUSY breaking scale > EW scale
でみたすことは可能

その際、 m_{SUSY} から m_{EW} への RGE running
を考慮すると、 $m_{H_{u,d}}^2$ の β-function に
$(\text{yukawa coupling})^2$ が含まれる。

$$\begin{cases} \dfrac{dm_{H_u}^2}{d\ln\mu} \sim \dfrac{1}{8\pi^2}\left(3 y_t^2 (m_{H_u}^2 + m_{\tilde{Q}_3}^2 + m_{\tilde{t}_R}^2) + \cdots\right) \\ \dfrac{dm_{H_d}^2}{d\ln\mu} \sim \dfrac{1}{8\pi^2}\left(3 y_b^2 (m_{H_d}^2 + m_{\tilde{Q}_3}^2 + m_{\tilde{b}_R}^2) + \cdots\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $m_{H_u}^2 < m_{H_d}^2$ @ weak scale

$$\langle H_u^0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \sin\beta, \quad \langle H_d^0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \cos\beta$$

として、SM Higgs mass をもとめると.

$$\boxed{m_h^2 = \frac{1}{2}\left[M_Z^2 + M_A^2 - \sqrt{(M_Z^2 + M_A^2)^2 - 4 M_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta} \right]}$$

A : CP odd Higgs $M_A^2 = \dfrac{B}{\sin\beta\cos\beta}$

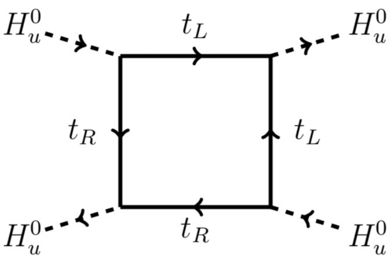
$$\left(\begin{aligned} H_u^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\beta(v+h) + \cos\beta H + i(\cos\beta A - \sin\beta G^0)\right) \\ H_d^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\beta(v+h) - \sin\beta H + i(\sin\beta A + \cos\beta G^0)\right) \end{aligned} \right)$$

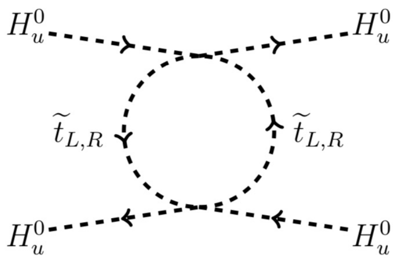
m_h^2 において、$M_A^2 \to \infty$ limit をとると、

$$m_h \leq M_Z|\cos 2\beta| \leq M_Z$$

tree level では、unrealistic ($m_h = 125\,\text{GeV}$)

Higgs の4次coupling の 1-loop correction が重要 → top, stop loop





$$\Rightarrow \quad \Delta m_h^2 = \frac{3}{4\pi^2} v^2 y_t^4 \sin^2\beta \ln\left(\frac{m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2}}{m_t^2}\right)$$

$$\simeq \frac{(90\,\text{GeV})^2}{\sin^2\beta}$$

$$y_t = \frac{\sqrt{2}\, m_t}{v \sin\beta}$$

$$\boxed{m_h < 130\,\text{GeV}}$$

(y_t が GUT scale で ∞ にならない)

§ Gauge hierarchy problem solutions

① Large Extra Dimension ($\supset$ Universal Extra Dimension (UED))

spacetime の dimension を $D = 4+\delta$ とし、

δ コの空間は コンパクト化 されているとする。

<u>Einstein–Hilbert action</u> ← D-dim

$$S_{EH} = -\frac{1}{2} M_D^{2+\delta} \int d^4x\, d^\delta y \sqrt{-g}\, R$$

D次元のプランクスケール
reduced

D次元metric det.

$$\left(\dim(g) = 0 \longrightarrow \dim(R) \sim \dim(\partial^2 R) = 2 \right)$$

fluctuation $\quad g_{MN} = \eta_{MN} + \frac{h_{MN}}{M_p^{2+\delta}}$

例として、半径 R でコンパクト化する $(\overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{\delta})$

$$g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_\mu & \phi \end{array}\right)$$

graviton

$\begin{pmatrix} M, N = 0, 1, 2, \cdots, 4+\delta \\ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \\ m, n = 1, 2, \cdots, \delta \end{pmatrix}$

gauge field $(g_{\mu m})$

scalar field (g_{mn})

DOF

$$\underbrace{\frac{1}{2}(4+\delta)(5+\delta)}_{G_{MN}} = \underbrace{\frac{1}{2}4\times 5}_{g_{\mu\nu}} + \underbrace{2\times\frac{1}{2}4\times\delta}_{A_\mu}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\delta(\delta+1)}_{\phi}$$

とくに、4d graviton は $g_{\mu\nu}(x, y)$ を $\underbrace{\text{mode expansion}}_{\text{平面波で展開できる}}$ すると得られる。

平面波(モード関数)

$$g_{\mu\nu}(x,y) = \underbrace{g^{(0)}_{\mu\nu}(x)} + \frac{1}{(2\pi R)^{\delta/2}} \sum_{\vec{n}\neq 0} e^{\frac{i}{R}\vec{n}\cdot\vec{y}}\, \underbrace{g^{(\vec{n})}_{\mu\nu}(x,y)}$$

余剰空間によらない
4次元 graviton
$\vec{n}=0 \Rightarrow$ "ゼロモード"

"Kaluza-Klein
モード"

$\vec{y}=(y_1,\cdots,y_\delta)$
$\vec{n}=(n_1,\cdots,n_\delta)$

mass spectrum

$$m^2_{\vec{n}\neq 0} = \frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{\delta} \vec{n}_i^{\,2} \geq \frac{1}{R^2}$$

この展開を S_{EH} に代入して、4d graviton
の部分を抽出すると、

$$S_{EH} \supset -\frac{1}{2} M_D^{2+\delta} \int d^4x\, (2\pi R)^\delta \sqrt{-g^{(0)}}\, R^{(0)}$$

"
4d プランク定数 M_p^2 と同定

$$M_D^{2+\delta}(2\pi R)^\delta = M_P^2$$

$(4+\delta)$ dim プランク　　4-dim プランク

Rを適当に大きくとることができれば

$M_D \sim \mathcal{O}(\mathrm{TeV})$ が可能

$$R \sim 10^{\frac{32}{n}}\ \mathrm{TeV}^{-1} = \begin{cases} \cancel{10^{15}\ \mathrm{cm}} & (n=1) \\ 0.1\ \mathrm{cm} & (n=2) \\ < 10^{-6}\ \mathrm{cm} & (n=3) \\ \vdots \end{cases}$$

excluded

Hierarchy problem は以下のように解決

$$\delta m_H^2 \sim \int d^{4+\delta}k \frac{1}{k^2-m^2}$$

$$\sim \int_0^{M_D} dk^2 \frac{(k^2)^{(2+\delta)/2}}{k^2-m^2}$$

finite!

Higgs mass の loop 補正

TeV cutoff がはいる

Large Extra Dimension による hierachy problem の解は、大きい余剰空間が自然に実現されることを示さないと単なるいいかえにすぎない。

"Radion"

また、余剰空間をスカラー場の期待値とみなす考え方が string theory では自然

→ $R = \langle g_{55} \rangle$ (5D)

Radion はもともと metric なので、

classical には potential が存在しない

quantum correction (perturbative or non-perturbative) による potential 生成 → 最小値で決まる

Radius stabilization の問題 → むずかしい

② Warped Extra Dimension
(Randall–Sundrum model)

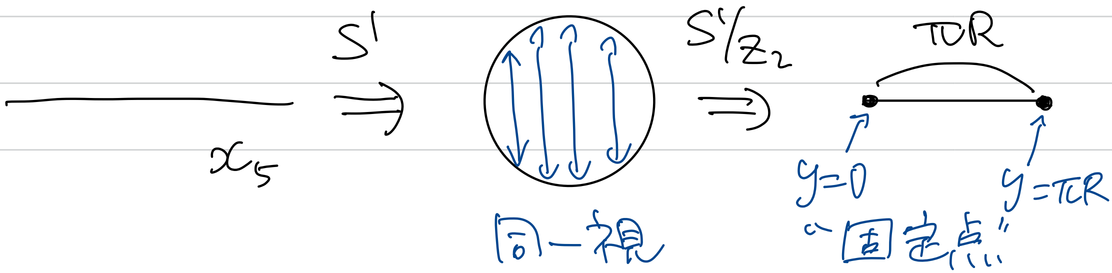
前述のシナリオは、余剰空間が flat

曲がった場合を考えるとどうなるか？

設定

* 5次元理論で、5番目の空間を S^1/Z_2 でコンパクト化

$$\begin{cases} S^1 : x_5 \sim x_5 + 2\pi R & \text{(周期的 B.C.)} \\ Z_2 : x_5 \sim -x_5 & \text{(余剰空間における空間反転)} \end{cases}$$



* action of RS model

E-H項

$$S_5 = \int d^4x\,dy\sqrt{-g}\left[-\underbrace{\Lambda}_{\text{5D 宇宙項}} + 2\underbrace{M_5^3}_{\text{5D プランクスケール}}R\right]$$

5番目の空間

$$+\ \delta(y)\int d^4x\sqrt{-g_{y=0}}\left(\mathcal{L} - \Lambda_{y=0}\right)$$

4D 宇宙項

y=0 上の action

$$+\ \delta(y-\pi R)\int d^4x\sqrt{-g_{y=\pi R}}\left(\mathcal{L} - \Lambda_{y=\pi R}\right)$$

y=πR 上の action

5D 曲率スケール

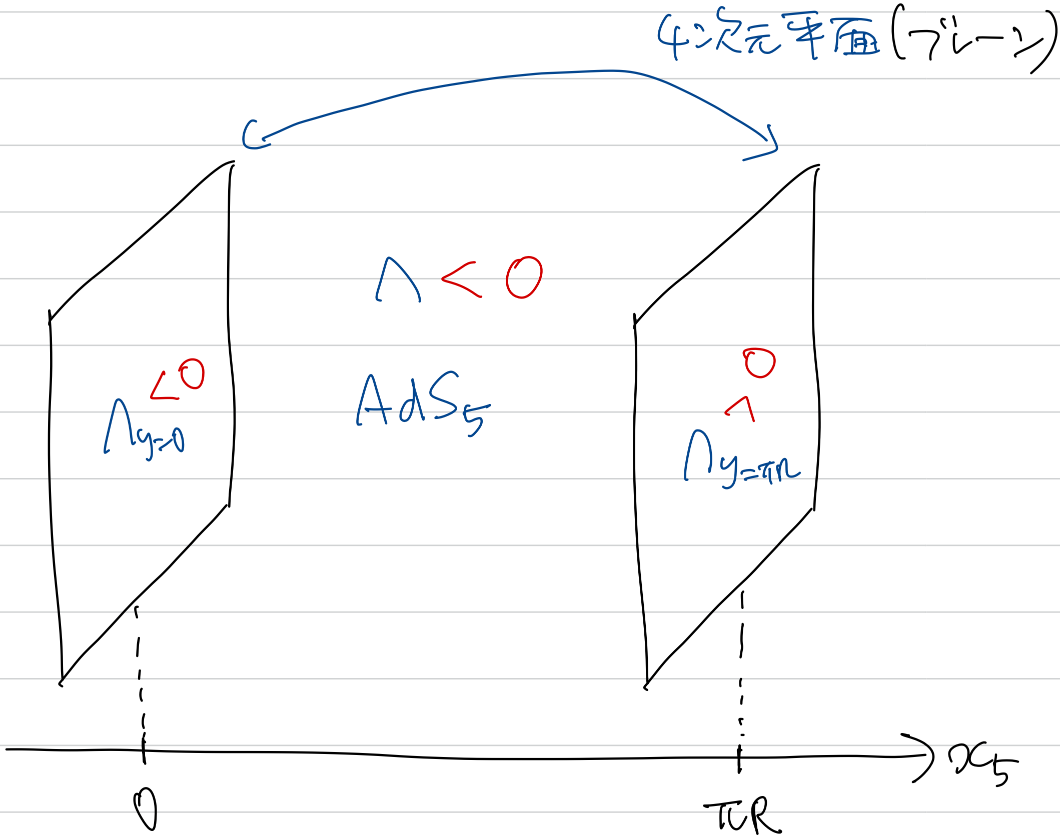
$$\Lambda = -\Lambda_{y=0} = \Lambda_{y=\pi R} = -24M_5^3k^2 \text{ のとき}$$

アインシュタイン方程式の古典解

$$\boxed{ds^2 = e^{-2ky}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2}$$

をみつけた。

"warp factor"



* hierachy problem への応用

Standard model Higgs field が
$y = \pi R$ ブレーンに局在していると仮定

y に依存しない

Higgs 場の action

$$S_{Higgs} = \int d^4x \sqrt{-g_{y=\pi R}} \times$$

$g^{y=\pi R}_{\mu\nu} = e^{-2k\pi R}\eta_{\mu\nu}$

$$\left[g^{\mu\nu}_{y=\pi R} (D_\mu H)^\dagger (D_\nu H) - \lambda (|H|^2 - v_0^2) \right]$$

$$= \int d^4x \; e^{-4k\pi R} \times$$

$$\left[e^{2k\pi R} \eta^{\mu\nu} (D_\mu H)^\dagger (D_\nu H) - \lambda (|H|^2 - v_0^2)^2 \right]$$

$H \to e^{k\pi R} H$

$$\to \int d^4x \left[\eta^{\mu\nu} (D_\mu H)^\dagger (D_\nu H) - \lambda (|H|^2 - v_0^2 \underline{e^{-2k\pi R}})^2 \right]$$

canonical normalization

RS model では,
$y = \pi R$ 上の dimensionful パラメタ
は warp factor でスケール

$v_0 e^{-k\pi R} \approx m_H = 125\,\mathrm{GeV}$ とみなすべき

v_0は、とくに理由がない限り 5Dプランクスケール
と考えるのが自然。又、RS model では、
5Dプランク ≈ 4Dプランク (後述) なので、

$$e^{-k\pi R} \approx \frac{\mathcal{O}(1\,\mathrm{TeV})}{M_{planck}} \sim 10^{-16\sim-15}$$

$$\therefore \quad kR \approx \mathcal{O}(10)$$

コンパクト化スケール R^{-1} と AdS_5 曲率スケール
は1ケタ程度しか違わない

Einstein - Hilbert action は、

$$S_{EH} = 2M_5^3 \int d^4x\, dy \underbrace{\sqrt{-g}}_{e^{-4ky}\sqrt{-\eta}} \underbrace{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}_4 e^{2ky}}$$

$$\Rightarrow M_4^2 = 2M_5^3 \underbrace{\int_0^{\pi R} dy\, e^{-2ky}}_{\frac{1}{2k}\left(1-e^{-2k\pi R}\right)}$$

$$M_4^2 = \frac{M_5^3}{k}\left(1 - \underbrace{e^{-2k\pi R}}_{\ll 1}\right) \approx \frac{M_5^3}{k}$$

よって、

$$M_4 \approx k \approx M_5 \leftarrow \text{natural choice}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{R} \approx O(0.1)\,k$$

RS model では、コンパクト化スケールは 4D プランクスケールとそれほど変わらない (Large Extra D とのちがい)

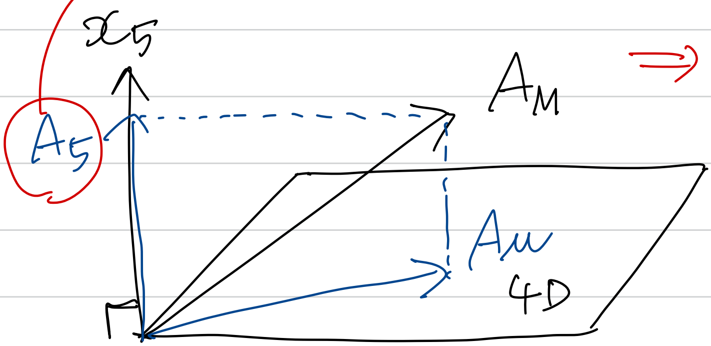
ただし、$kR \sim O(10)$ を自然に実現するメカニズムを構成する必要がある。
(ex Goldberger-Wise mechanism)

③ Gauge-Higgs unification

高次元ゲージ理論において、ゲージ場の余剰空間成分をHiggs場とみなす

4次元からみるとスカラー場

⇒ Higgsとみなす



$(M=0,1,2,3,5)$

Higgs場は、もともとゲージ場なので、

ゲージ対称性によりmass (potential) が禁止される

loop correctionにより、mass (potential) を生成

Coleman-Weinberg potential

Higgs mass calculation

簡単のため、(D+1)次元QEDを考え、(D+1)番目の空間をS^1にコンパクト化した理論で計算

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi$$

$$\left(\begin{array}{ll} F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M & (M = \underbrace{0, 1, \cdots, D-1}_{\mu}, D) \\ D_M = \partial_M - ieA_M & \\ \cancel{D} = \Gamma^M D_M & \Gamma^M = (\gamma^\mu, i\gamma^5) \end{array} \right)$$

S^1の boundary condition

(D+1) th coordinate

$$\begin{cases} A_M(x_\mu, y + 2\pi R) = A_M(x_\mu, y) \\ \psi(x_\mu, y+2\pi R) = e^{2\pi i \alpha} \psi(x_\mu, y) \end{cases}$$

一般に U(1) の phase をもてる
(twisted boundary condition)

KK expansion

$$\psi(x_\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}(x_\mu)\, e^{i\frac{n+\alpha}{R}y}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}_\psi = \int d^4x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi}^{(n)}(x_\mu) \times \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - i\frac{n+\alpha}{R}\gamma^5\right)\psi^{(n)}(x_\mu) + \cdots$$

$$\therefore \boxed{m_{phys}^2 = m^2 + \left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2}$$

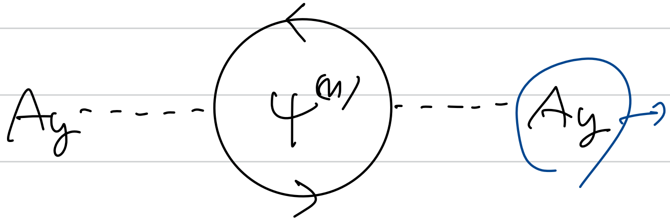
gauge interaction of $A_y^{(0)}$

$$e_{D+1}\int d^4x \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi}^{(n)}(x_\mu) A_y^{(0)}(x_\mu)\, i\gamma^5\, \psi^{(n)}(x_\mu)$$

$A_y^{(0)}$ normalization

e_D: D次元QEDのcoupling constant

A_y の $(\text{mass})^2$ @ 1-loop を計算



→ Higgs とみなす

$$m_H^2 = i e_D^2 \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{Tr}\left[\gamma^5 \frac{1}{\not{k}-m_{phys}} \gamma^5 \frac{1}{\not{k}-m_{phys}}\right]}_{\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^5(\not{k}+m_{phys}^*)\gamma^5(\not{k}+m_{phys}^*)\right]}{(k^2-m_{phys}^2)^2}}$$

$$\mathrm{Tr}\left[(-\not{k}+m_{phys}^*)(\not{k}+m_{phys}^*)\right]$$

$$= \left(-k^2+M^2-\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2\right) 2^{[(D+1)/2]}$$

$$= i e_D^2 \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2^{\left[\frac{D+1}{2}\right]} \left(\overbrace{-k^2+M^2}^{\rho^2 \text{とおくと}}-\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2\right)}{\left(k^2-M^2-\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2\right)^2}$$

$$\frac{2\rho^2}{\left(\rho^2+\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2\right)^2} - \frac{1}{\rho^2+\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2}$$

$$R\to\infty \quad \longrightarrow \quad \frac{i\,\overbrace{\boxed{e_D^2(2\pi R)}}^{e_{D+1}^2}}{D+1}\int\frac{d^{D+1}k}{(2\pi)^{D+1}}\frac{\boxed{Tr\left(\Gamma^M(\cancel{k}+m)\Gamma_M(\cancel{k}+m)\right)}}{(k^2-m^2)^2}$$

$$2^{\left[\frac{D+1}{2}\right]}\left(m^2(D+1)+\left(2-(D+1)\right)k^2\right)$$

$$=\frac{i e_{D+1}^2}{D+1}2^{\left[\frac{D+1}{2}\right]}\int\frac{d^{D+1}k}{(2\pi)^{D+1}}\left[(1-D)\frac{1}{k^2-m^2}+2m^2\frac{1}{(k^2-m^2)^2}\right]$$

次元正則化

$$\downarrow$$

$$=\frac{2^{\left[\frac{D+1}{2}\right]}}{D+1}\frac{e_{D+1}^2}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}}}\left\{1-D+2m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right\}\Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right)(m^2)^{\frac{D-1}{2}}$$

$$=0$$

$R\to\infty$ では，$(D+1)$-dim gauge invariance から mass がゆるされない

finite R では

$$m_H^2 = i e_D^2\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2^{\left[\frac{D+1}{2}\right]}\left(\overbrace{-k^2+m^2}^{\rho^2\text{とおくと}}-\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2\right)}{\left(k^2-m^2-\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2\right)^2}$$

$$\frac{2\rho^2}{\left(\rho^2+\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2\right)^2}-\frac{1}{\rho^2+\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2}$$

$$= i e_D^2 \, 2^{\left[\frac{D+1}{2}\right]} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right)\left(\frac{2\pi R}{2\rho}\right) \times$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+\alpha}{R}\right)^2 + \rho^2} - \underbrace{2\pi R \int \frac{dk_y}{2\pi} \frac{1}{k_y^2 + \rho^2}}_{R \to \infty \text{の寄与を引く}} \qquad \left[\frac{\sinh(2\pi R\rho)}{\cosh(2\pi R\rho) - \cos(2\pi\alpha)} - 1\right]$$

$$= \frac{2\pi R}{2\rho}\left(\frac{\sinh(2\pi R\rho)}{\cosh(2\pi R\rho) - \cos(2\pi\alpha)} - 1\right)$$

$$= \frac{e_D^2 (2\pi R)^2}{2^{D-\left[\frac{D+1}{2}\right]} \pi^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \underbrace{\int_0^\infty dk_E^{D-1} \frac{1 - \cosh\left(\sqrt{k_E^2 + m^2}\, 2\pi R\right) \cos(2\pi\alpha)}{\left[\cosh\left(\sqrt{k_E^2 + m^2}\, 2\pi R\right) - \cos(2\pi\alpha)\right]^2}}_{\text{有限!!}}$$

具体例　$D = 5, \; m = 0, \; \alpha = \frac{1}{2}$

$$m_H^2 = \frac{9 e_4^2}{16\pi^4 R^2} \zeta(3) \leftarrow \text{loop factor} \times \frac{1}{R^2}$$

$E > \frac{1}{R}$　5D gauge sym. unbroken ← コンパクトスケールでcutoff

$E < \frac{1}{R}$　5D → 4D gauge sym

$m_{A_\mu}^2 = 0$, $m_{A_y}^2$ がゼロである必要なし

EW symmetry breaking

① Large Extra Dimension (UED)

naive UED modelでは、Higgs potentialを、高次元Lagrangianに書きくだすだけなので、Standard model同様、~~EW~~は予言不可

② RS model

RS modelでは、Higgs fieldは $y=\pi R$ ブレーンに局在している setupで、potentialは通常の Standard model Higgs potentialを仮定

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \delta(y-\pi R)\int d^4x\sqrt{-g}\times\left[D_\mu H^\dagger D^\mu H - \underbrace{\lambda\left(|H|^2-v_0^2\right)^2}_{\text{本質的にStandard model と同じ}}\right]$$

③ Gauge-Higgs unification (GHU)

以下、簡単のために 5D に限定

Higgs が高次元ゲージ場由来なので、
~~EW~~ は非常に non-trivial

◎ まず、$SU(2)_L$ doublet としての Higgs を
A_5 から生成する必要がある。

↳ adjoint 表現なので、$SU(2)_L \times U(1)_Y$
からスタートできない

simplest group : $SU(3) \supset SU(2)_L \times U(1)_Y$

コンパクト化は、S^1/Z_2 を採用

Boundary conditions on S^1/Z_2

S^1: $A_\mu(x, y+2\pi R) = A_\mu(x,y)$

$A_5(x, y+2\pi R) = A_5(x,y)$

Z_2: $\left.\begin{aligned} P A_\mu(x,-y) P^\dagger &= A_\mu(x,y) \\ P A_5(x,-y) P^\dagger &= -A_5(x,y) \end{aligned}\right)$ $y=0$ について

$\left.\begin{aligned} P A_\mu(x,\pi R-y) P^\dagger &= A_\mu(x,y) \\ P A_5(x,\pi R-y) P^\dagger &= -A_5(x,y) \end{aligned}\right)$ $y=\pi R$ について

$$P = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ ← パリティ matrix

A_μのパリティは、$SU(2)_L \times U(1)_Y$が残るように、

A_5のパリティは、

$$F_{\mu 5} = \partial_\mu A_5 - \partial_5 A_\mu - ig[A_\mu, A_5]$$

から、A_μと反対のパリティに自動的に決まる

上記の boundary condition から $A_{\mu,5}$ の成分を具体的に表すと、

$$A_\mu = \begin{pmatrix} (+,+) & (+,+) & (-,-) \\ (+,+) & (+,+) & (-,-) \\ (-,-) & (-,-) & (+,+) \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} (-,-) & (-,-) & (+,+) \\ (-,-) & (-,-) & (+,+) \\ (+,+) & (+,+) & (-,-) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} A_M^{(+)}(x,y) \sim \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_M^{(+)}(x) \cos\left(\frac{n}{R} y\right) \\ A_M^{(-)}(x,y) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_M^{(-)}(x) \sin\left(\frac{n}{R} y\right) \end{array} \right)$$

Z_2 パリティ even field のみ $n=0$ モード、つまり massless field をもつ

$$\begin{cases} A_\mu : SU(3) \longrightarrow SU(2) \times U(1) \\ A_5 : SU(2) \text{ doublet 4D scalar が massless} \end{cases}$$

$n=0$ セクター

$$A_\mu^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}B_\mu & \sqrt{2}W_\mu^+ & 0 \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}B_\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}B_\mu \end{pmatrix}$$

$$A_5^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & H^+ \\ 0 & 0 & H^0 \\ H^- & H^{0*} & 0 \end{pmatrix}$$

KKスペクトル

$$M_{W_n} = \frac{n+a}{R} \quad M_{Z_n} = \frac{n+2a}{R} \quad M_{\gamma_n} = \frac{n}{R}$$

$$\langle A_5^{(0)} \rangle = \frac{a}{g_5 R}$$

$\to n=0$

$$M_W = \frac{a}{R}, \quad M_Z = \frac{2a}{R}, \quad M_\gamma = 0$$

$\Leftrightarrow SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$ by $a \neq 0$

$M_Z = 2M_W \Leftrightarrow \sin^2\theta_W = \frac{3}{4} \gg 0.23$ (exp.)

$\hookrightarrow$ wrong prediction

EW symmetry breaking

◎ No Higgs potential @ tree level

$$-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} \quad (M, N = 0, 1, 2, 3, 5)$$

$$\left(F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_N - ig[A_M, A_N] \right)$$

に、A_5 の potential 項がない

$$\left(\because \ [A_5, A_5] = 0 \right)$$

◎ loop correction からは、potential 生成

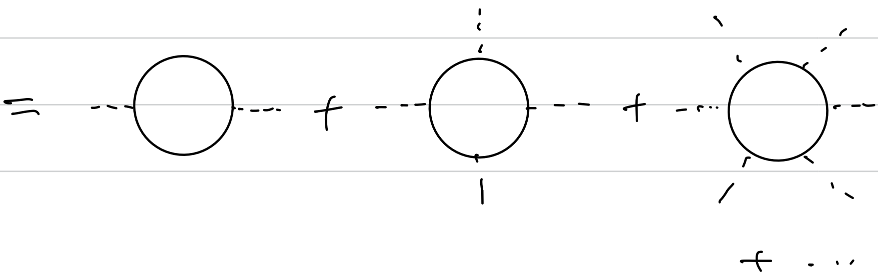
(Coleman-Weinberg potential)

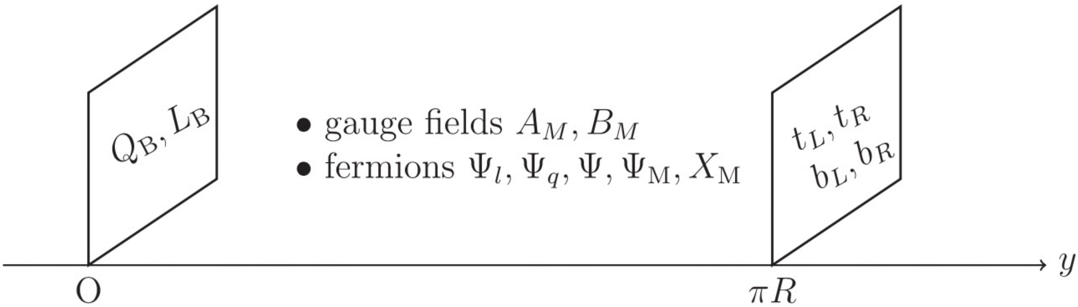
fermion number

$$V(A_5)_{1\text{-loop}} = (-1)^F \frac{1}{2}(\mathrm{DOF}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi R} \sum_n \log\left(p^2 + m_n^2(A_5)\right)$$

loop を回る field の自由度

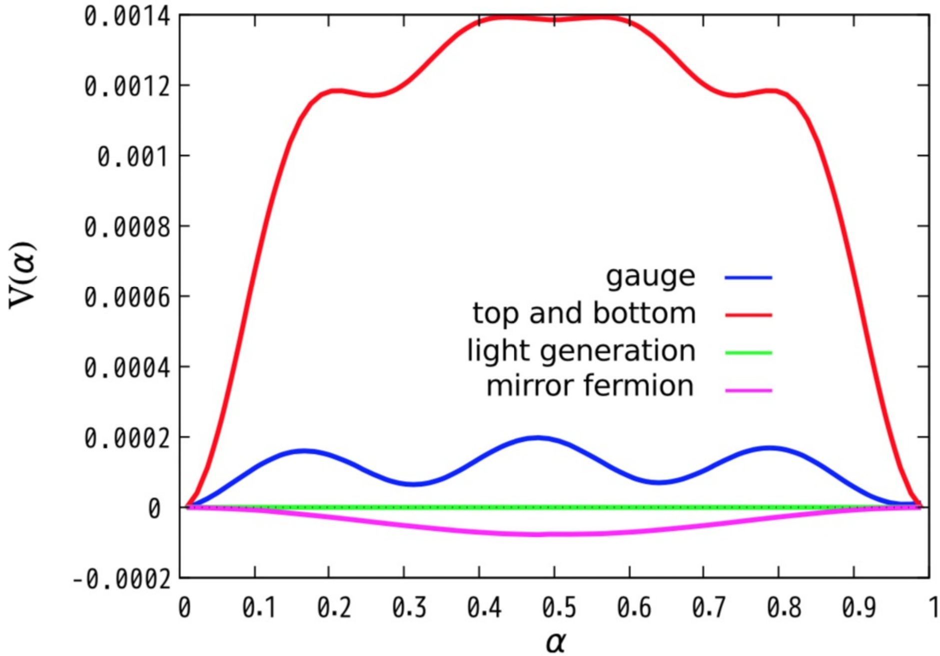
KK mass



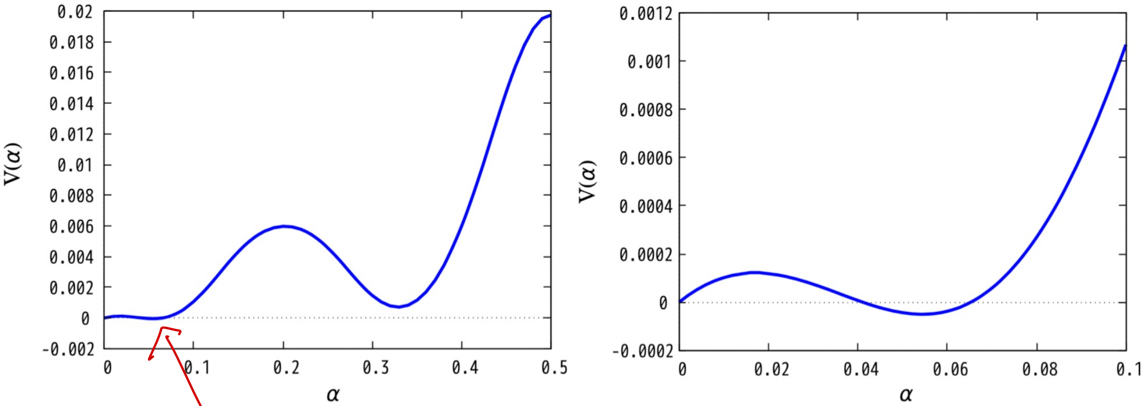


Adachi & NM (2020)

Higgs potential of the above setup



potentialが周期的なのは、秩序パラメタがWilson-line $\exp\left(ig\oint_{S^1} dy \langle A_y \rangle\right)$ だから



minimum

$SU(2)\times U(1) \longrightarrow U(1)$

$m_H \sim 127\,\mathrm{GeV}$, $\frac{1}{R} \sim 1.8\,\mathrm{TeV}$

Wilson-line

$$\langle W \rangle = P \exp\left(i g \oint_{S^1} dy \langle A_y \rangle \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi\alpha) & i\sin(\pi\alpha) \\ 0 & i\sin(\pi\alpha) & \cos(\pi\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\langle A_y \rangle = \frac{\alpha}{gR} \frac{\lambda^6}{2}$$

Gell-Mann行列

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 < \alpha < 1$ では、

$$[\langle W \rangle, \sqrt{3}\lambda^3 + \lambda^8] \qquad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\| \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & i\sin \\ 0 & i\sin & \cos \end{pmatrix}, \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\|$$

$$0$$

$$\left.\begin{aligned} &\\ &[\langle W \rangle, \text{others}] \neq 0 \end{aligned}\right\} SU(2) \times U(1) \to U(1)_{em}$$

◎ GHUでは、matter content を fix すると、Higgs potential は完全に決まる。

→ 高い予言能力

Yukawa coupling

Yukawa Coupling のための準備

S^1 や T^2 などのコンパクト化では、
カイラルフェルミオンが実現できない。

$\Longrightarrow$ S^1/Z_2 や T^2/Z_n などのように
離散群で割るオービフォルド
コンパクト化を考える

S^1/Z_2 を例にとる。
まず S^1 の場合

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

$$S_\psi = \int d^4x\,dy\ \bar{\Psi}\ i\Gamma^M \partial_M \underbrace{\Psi(x,y)}_{\parallel}$$

$\Psi(x_\mu, y+2\pi R) = \Psi(x_\mu, y)$ とすると、

$$\Psi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \psi^{(n)}(x_\mu)\, e^{i\frac{n}{R}y}$$

と展開できる。$\longrightarrow$ S_ψ に代入

$$S_\psi = \int d^4x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi}^{(n)}(x_\mu)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - i\gamma^5\frac{n}{R}\right)\psi^{(n)}(x_\mu)$$

$\Gamma^M = (\gamma^\mu, i\gamma^5)$, $D_M = \partial_M - igA_M$

$\to$ $\psi^{(0)}_{L,R}$ ともに massless non-chiral

S^1/Z_2 の場合

$$\begin{cases} S^1 : \psi(x_\mu, y+2\pi R) = \psi(x_\mu, y) \\ Z_2 : \psi(x_\mu, -y) = \pm\gamma^5\psi(x_\mu, y) \end{cases}$$

右辺 $+\gamma^5$ とすれば、

$$\begin{cases} \psi_R(x_\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\psi^{(0)}_R(x_\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}\psi^{(n)}_R(x_\mu)\cos\left(\frac{n}{R}y\right) \\ \psi_L(x_\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}\psi^{(n)}_L(x_\mu)\sin\left(\frac{n}{R}y\right) \end{cases}$$

Right-handed フェルミオンだけ massless
($-\gamma^5$ なら left-handed が massless)

Yukawa hierarchyを再現する際に、
5D fermionのmass parameterが重要
S^1/Z_2では

$$m\bar{\Psi}\Psi = m\bar{\Psi}_L\Psi_R + m\bar{\Psi}_R\Psi_L$$

において、left と right の Z_2 パリティは
いつも反対。つまり, Z_2: $\bar{\Psi}_{L(R)}\Psi_{R(L)} \longrightarrow -\bar{\Psi}_{L(R)}\Psi_{R(L)}$

よって、mass term が Z_2 パリティのもとで
許されるためには、m の Z_2 パリティとして
odd が必要。$\longrightarrow m = \epsilon(y)M$
sign 関数

5D Dirac equation

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^5\partial_5 - \epsilon(x_5)M\right)\begin{pmatrix}\Psi_R \\ \Psi_L\end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(\partial_5 - \epsilon(x_5)M\right)f_L^{(0)}(x_5) \rightarrow f_L^{(0)}(x_5) = \sqrt{\dfrac{2M}{e^{2\pi MR}-1}}\, e^{M|x_5|} \\ \left(\partial_5 + \epsilon(x_5)M\right)f_R^{(0)}(x_5) \rightarrow f_R^{(0)}(x_5) = \sqrt{\dfrac{2M}{1-e^{-2\pi MR}}}\, e^{-M|x_5|} \end{cases}$$

UEDを想定

$\ast$ Yukawa coupling (例 up-type quark)

$$\int d^4x\, dy\, Y\, \bar{U}^i Q^j H_u \quad (i,j = 1,2,3)$$

5D Yukawa coupling $\sim \mathcal{O}(1)$

$$= \underbrace{\left(Y \int dy\, f^{(0)i}_{u_R}(y)\, f^{(0)j}_{Q_L}(y)\, f^{(0)}_{H_u}(y) \right)}_{\text{4D effective Yukawa coupling } y_{ij}}$$

$$\times \int d^4x\, u^{(0)i}_R(x)\, q^{(0)j}_L(x)\, h^{(0)}_u(x)$$

$$y_{ij} = Y \frac{2\sqrt{M_i M_j}}{\sqrt{(1-e^{-2\pi M_i R})(e^{2\pi M_j R}-1)}} \int_0^{\pi R} dy\, e^{-(M_i - M_j)y}$$

Higgs fieldのzero mode function は constant にとった

$i \neq j$

$$\simeq Y \times 2\sqrt{M_i M_j}\, e^{-M_j \pi R} \frac{1}{M_i - M_j}$$

5D mass (Bulk mass) によって control

◎ exponential suppression なので、
$M \sim O(1)$ でも 6ケタの階層性は easy
parameter の tuning の度合いは少なくなる。

◎ top Yukawa $\sim O(1)$ なので、zero mode
に top quark を含む 5D fermion は、
massless

◎ neutrino mass については、bulk mass を
大きくとれば、非常に小さい neutrino
Yukawa を実現

→ かならずしも シーソー機構 にたよる
必要はない

◎ ブレーン上に局在する SM fermion がある場合
には、$y=0, \pi R$ に応じた位置での mode
function の値で決まる

$$\left(e^{-M\times 0} \,@\, y=0, \quad e^{-M\pi R} \,@\, y=\pi R \right)$$

* RS model における Yukawa coupling

gauge hierarchy problem の解決から、
Higgs は $y=\pi R$ ブレーンに局在した 4D 場
あるいは、$y=\pi R$ ブレーンに強くピークをもつ 5D 場
であることが必要

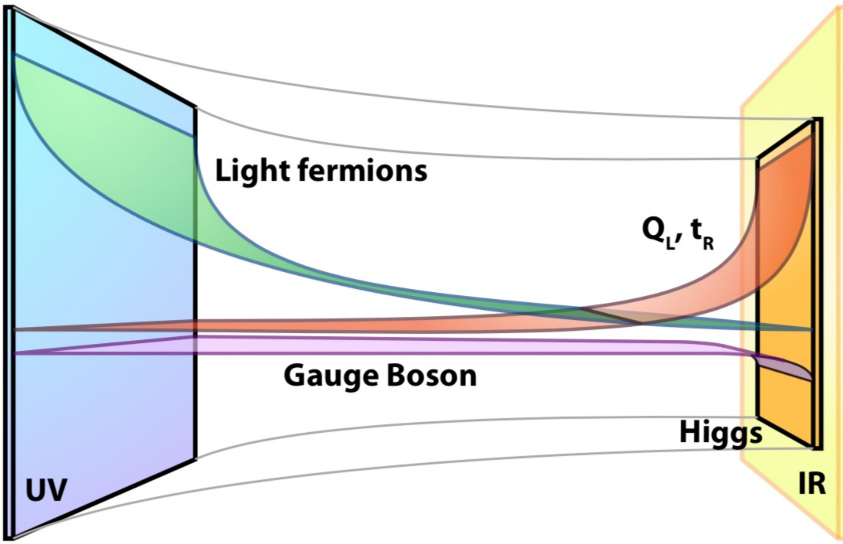
→ top Yukawa $\sim \mathcal{O}(1)$ なので、
top quark は $y=\pi R$ ブレーンに局在

→ bottom yukawa を再現するように
bottom quark の mode function を決定
↳ $y=\pi R$ ブレーンに局在の傾向

→ light fermions は、Higgs と弱く couple
$y=0$ ブレーンに局在

※ gauge boson zero mode は flat

Schmatic picture of realistic setup in RS model



* Gauge-Higgs unification における Yukawa coupling

quark, lepton がすべて 5D field の場合、

Yukawa coupling は gauge coupling で決まる

例えば、down-type Yukawa だと、

y 方向には flat

$$\underbrace{g_5}_{\text{gauge coupling}} \int d^4x\, dy\, \bar{\Psi}_i^{(0)} A_5^{(0)} \Psi_i^{(0)} \quad (i=1,2,3)$$

Dirac fermion のゼロモード

$$= \underbrace{\left(g_5 \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \int dy\, f_d^{(0)}(y) f_Q^{(0)}(y) \right)}_{\text{4D effective Yukawa coupling } Y_d} \int d^4x\, \bar{d}_{R_i} H Q_{L_i}$$

SU(3) on S^1/Z_2 model では、ゼロモードが

$$\Psi^{(0)}(3) = \begin{pmatrix} Q_L \\ d_R \end{pmatrix}$$ となる

Q, d_R が共通の multiplet に属するので、
ゼロモードの bulk mass 依存性も共通

$$Y_d = \underbrace{g_5 \frac{1}{\sqrt{\pi R}}}_{g_4} \int_0^{\pi R} dy \sqrt{\frac{2M}{1-e^{-2\pi MR}}} \sqrt{\frac{2M}{e^{2\pi MR}-1}}\, e^{-M|y|}\, e^{+M|y|}$$

$$\simeq g_4\, 2M\pi R\, e^{-\pi MR} \lesssim g_4$$

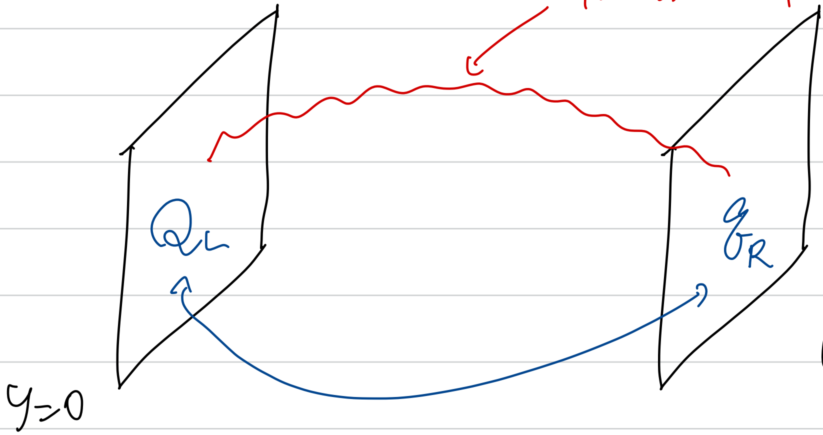
$$\Rightarrow \boxed{m_f \lesssim m_W}$$

◎ top 以外の yukawa coupling は、Mをtune することで出せる。
top yukawa を実現させる1つの方法は、top quark を SU(3)の高い表現(4階対称 tensor)にうめこむと、$\sqrt{4}$倍 enhance

◎ quark, lepton がすべて高次元バルク場由来では、flavor mixing がでない ← gauge interaction

→ ブレーン局在場、相互作用がひつよう

Massive fermion $\Psi, \tilde{\Psi}$



Z_2 parity が反対

($\Psi \supset \psi^d, \chi^s$ とする)

SM fermion はブレーン局在 ゼロモード

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{bulk} = \bar{\Psi} i \not{D} \Psi + \bar{\tilde{\Psi}} i \not{D} \tilde{\Psi} - M(\bar{\Psi}\tilde{\Psi} + \bar{\tilde{\Psi}}\Psi) \\ \mathcal{L}_{brane} = \delta(y)\left[\bar{Q}_L i \not{D} Q_L + \frac{\varepsilon_L}{\sqrt{\pi R}} \bar{\psi}^d Q_L + h.c.\right] \\ \qquad + \delta(y-\pi R)\left[\bar{q}_R i \not{D} q_R + \frac{\varepsilon_R}{\sqrt{\pi R}} \bar{q}_R \chi^s + h.c.\right] \end{cases}$$

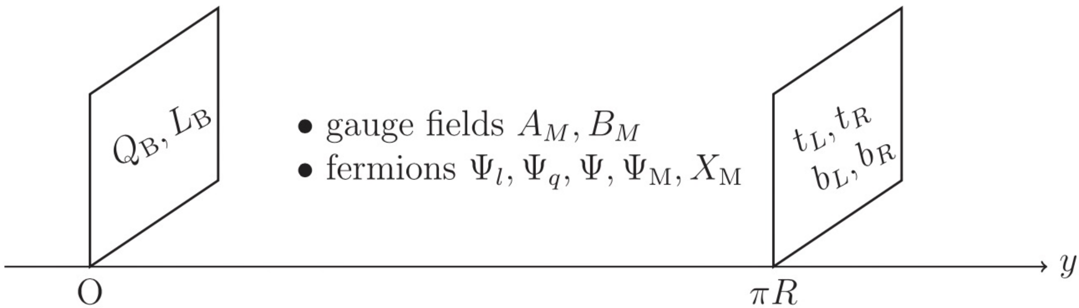
$\Psi, \tilde{\Psi}$ を integrating out

non-local

$$\rightarrow \varepsilon_L \varepsilon_R \pi M R\, e^{-M\pi R}\, \bar{q}_R\, e^{ig\int_0^{\pi R} dy A_y}\, Q_L$$

$$\Rightarrow m_f \sim \underbrace{\varepsilon_L \varepsilon_R}_{\text{ここに mixing のタネをいれる}} \pi M R\, M_W\, e^{-\pi M R}$$

An example of realistic GHU setup



Adachi & NM (2020)

◎ 3rd generation quarks $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$, t_R, b_R は $y=\pi R$ ブレーンに局在する 4D field

◎ 1st, 2nd generation quarks q と leptons ℓ は 5D field Ψ_q, Ψ_ℓ

◎ 5D massive fermion Ψ が top, bottom と couple

◎ Q_B, L_B は、$y=0$ ブレーンに局在する 4D field で、massless exotic fermion と mass をくむ

Extra Dimension の Experimental Signature

⓪ KK particle の signature を探す

モデルによらない KK particle は、

KK graviton

① Deviation from Newton's law

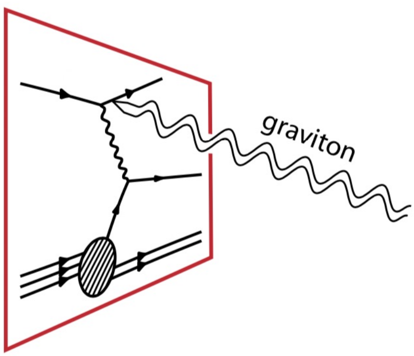
extra dimension のサイズ R より小さい距離では、KK graviton により Newton's law からずれる

$$V(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}\left[1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right]$$

(T^2 コンパクト化では、$\alpha = \frac{16}{3}$, $\lambda = R$)

$R < 30\,\mu m$ for 2 extra dimensions

② Collider Signals of KK graviton



もっともシンプルなSetupでは、SM fieldsはブレーンに局在

graviton だけが extra space を propagate

KK graviton production → missing energy

（ブレーン上では、energy-momentum 保存が破れる）

pp → jet + KK graviton
pp → γ + KK graviton
@LHC

$\Rightarrow$ $M_6 > 7.7$ TeV
$M_{10} > 4.8$ TeV
@95% CL

（$M_{6(10)}$：6(10)次元プランクスケール）

◎ RS model case

RS modelの場合は、注意が必要

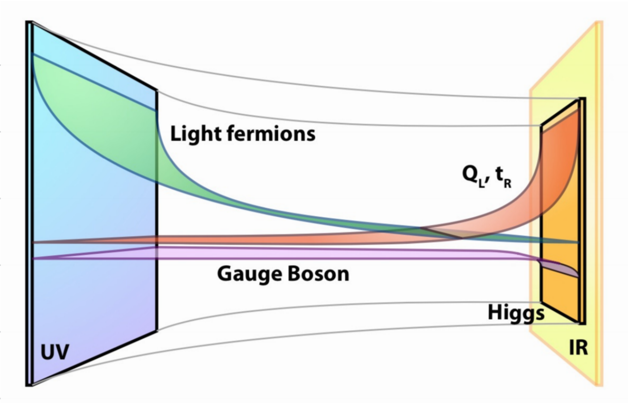
⇒ 1st KK graviton は $y=\pi R$ ブレーンにピークをもつ

original model では、SM粒子も $y=\pi R$ ブレーンに局在

⇒ 1st KK graviton → SM particles decay が重要

このsetupでは、flavor物理について SMとかわらない

Yukawa hierarchyをより自然に実現するには、SM fields も extra dimension に propagate (→ 下図)



KK gauge bosons も $y=\pi R$ ブレーンに
peakをもつ

KK gluon と t_R の相互作用が大きい
（Q_Lは bottom とも相互作用
するため、t_Rほどpeakは強くできない）

◎ Dark matter

KK graviton は、matter との相互作用が非常に弱い（$\sim \frac{1}{M_p}$）ので、Dark matter の候補にはならない

Standard model particle も extra dimension に propagate するならば、特徴的な候補が現れる。

Dark matter の安定性を保証する対称性として、KK パリティ が課される

↓

n 番目の KK 粒子に対して、

$P_{KK} = (-1)^n$ の Z_2 パリティを課す

出どころ

S^1/Z_2 コンパクト化により extra D 方向の並進不変性が破れる。

⟶ KK 運動量保存の破れ

LKP (lightest KK particle)

⇒ 一番軽いKK particle が安定なので
Dark matter の候補になりうる
(SUSY の Rパリティと同様のロジック)

⇒ UED などでは、1st KK photon が
典型例

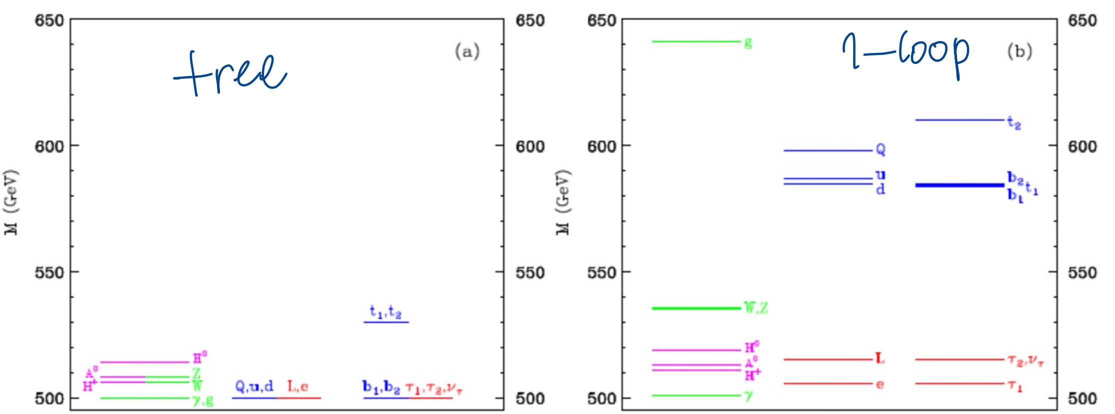


FIG. 6: The spectrum of the first KK level at (a) tree level and (b) one-loop, for $R^{-1} = 500$ GeV, $\Lambda R = 20$, $m_h = 120$ GeV, $\overline{m}_H^2 = 0$, and assuming vanishing boundary terms at the cut-off scale Λ.